

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria XIII

11 I 2013 r.

Zadanie 1. Niech $N \subseteq M$ oraz $\dim M < \infty$. Udowodnij że $\dim(M/N) = \dim M - \dim N$. Wywnioskuj stąd że $N_1, N_2 \subseteq M \Rightarrow \dim(N_1 + N_2) = \dim N_1 + \dim N_2 - \dim(N_1 \cap N_2)$, gdzie $N_1 + N_2 := \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$.

Zadanie 2. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$, gdzie V_1 jest rozpięta przez wektory

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a V_2 przez wektory

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.

Zadanie 3. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$, gdzie V_1 jest rozpięta przez wektory

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

a V_2 jest opisana układem równań

$$U_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.

Zadanie 4. Niech $v_1 = (3, 2, 1, 2)$, $v_2 = (9, 6, 3, 6)$, $v_3 = (6, 6, 6, 5)$ i $v_4 = (6, 8, 10, 6)$. Czy wektor $u = (1, 2, 3, 4)$ jest kombinacją liniową wektorów $\{v_i\}_{i=1, \dots, 4}$?

Zadanie 5. Czy istnieje rozwiązanie poniższego układu równań?

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 7 \\ 5x_1 + 15x_2 + 11x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 11 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$$

Zadanie 6. Niech B będzie bazą M . Udowodnij że do zadania odwzorowania liniowego z dziedziny M potrzeba i wystarcza zadać je na B , przy czym na B można zadać je w dowolny sposób. Wywnioskuj stąd że przestrzenie wektorowe są izomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy mają równy wymiar.