

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria XIV

18 I 2013 r.

Zadanie 1. Funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy *parzystą* wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)$, zaś *nieparzystą* wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$. Niech A będzie macierzą której wszystkie elementy pierwszego wiersza są funkcjami nieparzystymi, a wszystkie pozostałe elementy funkcjami parzystymi. Udowodnij że wyznacznik tej macierzy jest funkcją nieparzystą.

Zadanie 2. Macierzą *transponowaną* nazywamy do macierzy A nazywamy macierz A^t której elementy zdefiniowane są równaniami $\forall i, j : A_{ij}^t := A_{ji}$. Udowodnij że

$$\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A) \quad \text{oraz} \quad \det(A^t) = \det(A).$$

Zadanie 3. Niech $\{A_1, \dots, A_n\}$ będzie zbiorem macierzy. Podaj n różnych permutacji $\sigma \in S_n$ dla których

$$\operatorname{tr}(A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}) = \operatorname{tr}(A_1 \dots A_n).$$

Podaj przykład macierzy i permutacji dla których powyższa równość nie jest spełniona.

Zadanie 4. Dane są wektory w $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oraz permutacja zadana wzorem $\sigma(i) = (3i \bmod 4) + 1, i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

- a) Znajdź w bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $B: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ przekształcającego v_i na i -ty wektor bazy standardowej.
- b) Znajdź w bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $M: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 : v_i \mapsto v_{\sigma(i)}$.
- c) Oblicz ślady i wyznaczniki odwzorowań liniowych M i B .

Zadanie 5. Obliczyć ślady i wyznaczniki macierzy:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2 - x + 1 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & \cos \beta + i \sin \beta \\ \cos \alpha - i \sin \alpha & \cos \beta - i \sin \beta \end{pmatrix}$$

Zadanie 6. Obliczyć ślady i wyznaczniki macierzy:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} \quad c) \begin{pmatrix} a+x & a & a \\ a & a+x & a \\ a & a & a+x \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 2 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$