

# Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XV, 18 II 2013 r.

**Zadanie 1.** Oblicz wyznaczniki następujących macierzy za pomocą rozwinięcia Laplace'a:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ 2 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} i & 0 & 2 & 0 \\ i & 1 & 3 & 0 \\ 2-i & 0 & i+2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} i & -i & 2 & 0 \\ i+1 & -2i & 4 & 0 \\ 2-i & 0 & i+2 & 1 \\ 1 & -i & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz macierze odwrotne macierzy  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i  $D$ .

**Zadanie 2.** Oblicz wyznaczniki następujących macierzy oraz ustal które z nich i kiedy są odwracalne.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} a & a & \dots & a & a+x \\ a & a & \dots & a+x & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a+x & a & a & a & a \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos^2\frac{\theta}{2} & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

**Zadanie 3.** Sprawdź czy następujące macierze są odwracalne. Jeśli tak, to oblicz ich macierze odwrotne.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}), \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}),$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}), \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1+i & -i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i-1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

**Zadanie 4.** Ustal dla których  $a$  następujące macierze są odwracalne w  $\mathbb{C}$  i w  $\mathbb{R}$ . Jeżeli są odwracalne, to oblicz macierz odwrotną.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ 1 & -i & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} a & 1/4 & 0 \\ i & a & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$$

**Zadanie 5.** Ustal dla których  $a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  następujące macierze o współczynnikach w  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  są odwracalne lub mają nietrywialne jądro. Czy trywialność jądra wystarcza do odwracalności macierzy?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 1 & 2 \\ 3+a & 1 & 3a+2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} a+1 & a & a \\ a & a+1 & a \\ a & a & a+1 \end{pmatrix}$$

**Zadanie 6.** Dla jakich wartości  $a \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  endomorfizm  $f_a \in \text{End}((\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3)$  którego macierz w bazie kanonicznej jest postaci

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

jest bijekcją?