

# Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XVI, 25 II 2013 r.

**Zadanie 1.** Wyznacz rząd macierzy:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 2.** Rozwiąż układ równań:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 3.** W zależności od parametrów  $a, \lambda \in \mathbb{R}$ , rozwiąż układy równań:

$$\begin{cases} x + y + az = 2 \\ x + ay + z = -1 \\ ax + y + z = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} (1+\lambda)x + y + z = \lambda^2 + 3\lambda \\ x + (1+\lambda)y + z = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x + y + (1+\lambda)z = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{cases}.$$

**Zadanie 4.** Niech  $k$  będzie ciałem oraz  $A, A' \in M_{i \times j}(k)$ ,  $B \in M_{j \times m}(k)$ . Udowodnij następujące własności:

- a)  $\text{rank}(A + A') \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(A')$ ,
- b)  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ ,
- c)  $\text{rank}(B) = j \Rightarrow \text{rank}(AB) = \text{rank}(A)$ ,
- d)  $\text{rank}(A) = j \Rightarrow \text{rank}(AB) = \text{rank}(B)$ .

**Zadanie 5.** Niech  $V$  i  $W$  będą skończeniowymi przestrzeniami wektorowymi. Udowodnij że rząd odwzorowania liniowego  $f: V \rightarrow W$  jest równy rzędowi macierzy  $F$  tego odwzorowania wziętej względem dowolnych baz  $V$  i  $W$ .

**Zadanie 6.** Pokaż że istnieje więcej niż jedno ciało  $k$  dla którego istnieją odwzorowania liniowe  $f: k^{11} \rightarrow k^{11}$  i  $y_0 \in k^{11} \setminus \{0\}$  takie że równanie  $f(x) = y_0$  ma dokładnie 1024 różnych rozwiązań.