Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XVII, 4 III 2013 r.

Zadanie 1. W algebrze macierzy $M_2(\mathbb{C})$, oblicz spektrum macierzy:

$$F_n(t) := \begin{pmatrix} 2i & -t \\ t^{-1} & 2i \end{pmatrix}^n, \quad n \in \mathbb{N},\ t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Zadanie 2. Niech A będzie algebrą z jedynką nad ciałem k, a $a \in A$ elementem odwracalnym w A. Udowodnij że $\lambda \in \operatorname{spec}_A(a) \ \Leftrightarrow\ \lambda^{-1} \in \operatorname{spec}_A(a^{-1})$.

Zadanie 3. Niech k będzie nieskończonym pierścieniem całkowitym, a $F \in M_n(k)$ dowolną macierzą górnotrójkątną (tzn. $i > j \Rightarrow F_{ij} = 0$). Udowodnij że

$$\prod_{i=1}^{n} (F - F_{ii} I_n) = 0,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową rozmiaru n.

Zadanie 4. Niech

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

Sprawdzić, że C jest macierzą odwracalną zaś $D := C^{-1}\,T\,C$ jest macierzą diagonalną. Podać spektrum macierzy T oraz D. Obliczyć T^{2013}.

Zadanie 5. Oblicz wartości własne macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}b & 0 \\ \sqrt{2}b & a & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a \end{pmatrix},$$

gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $b \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6. Niech A będzie algebrą z jedynką nad przemiennym pierścieniem k, i niech $\operatorname{inv}(k)$ oznacza zbiór wszystkich odwracalnych elementów k. Udowodnij że

$$\forall\, a, b \in A\colon\ \operatorname{spec}_A(ab) \cap \operatorname{inv}(k) = \operatorname{spec}_A(ba) \cap \operatorname{inv}(k)\,.$$