

Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XVIII, 11 III 2013 r.

Zadanie 1. Znajdź wartości, wektory i podprzestrzenie własne macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2. Oblicz wartości i wektory własne macierzy

$$J_x := \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y := \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Znajdź wartości własne macierzy $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

wiedząc że składowe wektorów własnych v_k ($k = 1, 2, \dots, n$) mają następującą postać:

$$v_k^m = e^{2\pi i k m / n}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Zadanie 4. Pokaż że, jeśli $f, g \in \text{End}(\mathbb{C}^n)$ mają n liniowo niezależnych wspólnych wektorów własnych, to $f \circ g = g \circ f$.

Zadanie 5. Znajdź wartości własne i wektory własne macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

rozpatrując ją raz nad ciałem $\mathbb{R}$ a raz nad $\mathbb{C}$.

Zadanie 6. Zbadaj czy w $\mathbb{R}^3$ istnieje baza złożona z wektorów własnych macierzy:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$