

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria II

12 X 2012 r.

Zad. 1. Niech G będzie grupą z elementem neutralnym e . Pokaż, że G jest grupą przemenną, gdy:

a) $\forall x, y \in G \quad x^{-1}y^{-1}xy = e,$

b) $\forall x, y \in G \quad xyx^{-1}y^{-1} = e,$

c) $\forall x \in G \quad x^2 = e.$

Które warunki zachodzą również w drugą stronę.

Zad. 2. Niech $(G, \circ)$ będzie zbiorem z działaniem łącznym (tj. półgrupą). Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

a) $(G, \circ)$ jest grupą.

b) Dla każdego $a \in G$ odwzorowania:

$$G \ni b \mapsto a \circ b \in G, \quad G \ni b \mapsto b \circ a \in G$$

są bijekcjami.

Zad. 3. Niech $(G, \circ)$ będzie półgrupą i G ma skończoną liczbę elementów. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

a) $(G, \circ)$ jest grupą.

b) Działanie $\circ$ ma własność prawego i lewego skracania tj.

$$\forall a, b, c \in G \quad (a \circ c = b \circ c) \Rightarrow (a = b) \quad \wedge \quad \forall a, b, c \in G \quad (c \circ a = c \circ b) \Rightarrow (a = b).$$

Zad. 4. Wykaż, że każda permutacja daje się przedstawić jako skończona liczba transpozycji.

Zad. 5. W sali siedzi grupa osób. Dowieść, że po nieparzystej liczbie zabiegów polegających na tym, że dwie spośród osób zamieniają się swoimi miejscami, co najmniej dwie osoby znajdą się na miejscach innych niż na początku.

Zad. 6. Dana jest permutacja

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 8 & 9 & 11 & 10 & 12 & 7 & 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Podać:

a) permutację odwrotną σ^{-1} ,

b) rozkład σ na cykle,

c) rozkład σ na transpozycje,

d) znak permutacji: $\text{sign}(\sigma)$.

Zad. 7. Sprawdzić, że permutacje

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ i } \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}$$

są inwolucjami (tj. są równe swoim odwrotnościom) a ich złożenie jest cyklem długości n . Korzystając z tego wykazać, że każdą permutację zbioru skończonego można przedstawić w postaci złożenia dwóch inwolucji.