

# Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXII, 15 IV 2013 r.

**Zadanie 1.** Znajdź macierz formy dwuliniowej  $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - x_2y_2,$$

w bazie kanonicznej oraz w bazie  $f_1 = (1, 1)^T$ ,  $f_2 = (1, -1)^T$ .

**Zadanie 2.** Znajdź macierz formy dwuliniowej  $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3,$$

w bazie  $f_1 = (1, 1, 1)^T$ ,  $f_2 = (1, 1, -1)^T$ ,  $f_3 = (1, -1, -1)^T$ .

**Zadanie 3.** Dla formy dwuliniowej  $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_2y_2,$$

znajdź formy dwuliniowe symetryczną  $b_s$  oraz antysymetryczną  $b_a$  takie że

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b_s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + b_a(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

**Zadanie 4.** Znajdź formę kwadratową stowarzyszoną z formą 2-liniową  $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 - x_2y_2.$$

**Zadanie 5.** Sprowadź do postaci diagonalnej oraz znajdź bazy diagonalizujące form kwadratowych  $Q_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3, \quad Q_2(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2.$$

**Zadanie 6.** Sprowadź do postaci diagonalnej oraz znajdź bazy diagonalizujące form kwadratowych  $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$Q_1(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1, \quad Q_2(\mathbf{x}) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4.$$