Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXIV, 6 V 2013 r.

Zadanie 1. Niech V będzie dowolną przestrzenią unormowaną. Udowodnij że:

a) $\forall\, x, y \in V : |\|x\| - \|y\|| \leqslant \|x - y\|$,

b) wzór $d(x, y) := \|x - y\|$ definiuje metrykę na V,

c) norma jest funkcją ciągłą w tej metryce.

Zadanie 2. Udowodnij że na przestrzeni $C([0,1], \mathbb{C})$ zespolonych funkcji ciągłych na przedziale $[0,1]$ odwzorowanie zadane wzorem

$$\|f\| := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

jest normą na $C([0,1], \mathbb{C})$.

Zadanie 3. Niech $C^1[0,1]$ będzie rzeczywistą przestrzenią wektorową funkcji mających ciągłą pochodną na przedziale [0,1]. Wykaż że odwzorowanie zadane wzorem

$$\|f\| := |f(0)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|$$

jest normą na $C^1[0,1]$.

Zadanie 4. Niech $C([0, 2\pi], \mathbb{C})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych na przedziale $[0, 2\pi]$ o wartościach zespolonych. Sprawdź że odwzorowanie

$$C([0,2\pi], \mathbb{C}) \times C([0,2\pi], \mathbb{C}) \ni \langle f, g \rangle \longmapsto \langle f|g \rangle := \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx \in \mathbb{C}$$

jest iloczynem skalarnym. Wykaż że zbiór funkcji

$$\left\{ f_n(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

jest układem ortonormalnym, to znaczy że wszystkie elementy mają normę 1 oraz że iloczyn skalarny każdej pary dwóch różnych elementów wynosi 0.

Zadanie 5. Na $\mathbb{C}^3$ standardowy iloczyn skalarny zadany jest wzorem

$$\langle u|v \rangle := \sum_{k=1}^{3} \bar{u}_k\, v_k,$$

gdzie $u := (u_1, u_2, u_3)^T$, $v := (v_1, v_2, v_3)^T \in \mathbb{C}^3$. Oblicz $\operatorname{span}\{(1,2,3), (0,1,0)\}^\perp$.

Zadanie 6. Niech $\ell^2(\mathbb{N}) := \{f \in \operatorname{Map}(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)|^2 < \infty\}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym danym wzorem

$$\langle f|g \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \overline{f(k)} g(k).$$

Niech W będzie podprzestrzenią wszystkich ciągów skończonych (funkcji o skończonym nośniku). Udowodnij że $W \neq W^{\perp\perp}$.