

Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXV, 13 V 2013 r.

Zadanie 1. Udowodnij że sprzężenie hermitowskie $*$ ma następujące własności:

- a) $\forall f \in \text{End}(V) : f^{**} = f$,
- b) $\forall f \in \text{End}(V), \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$,
- c) $\forall f, g \in \text{End}(V) : (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Zadanie 2. Niech $V := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{C}$ będzie zespoloną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym względem którego baza kanoniczna $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ jest bazą ortonormalną. Oblicz sprzężenie hermitowskie endomorfizmu $s \in \text{End}(V)$ zadanego wzorem $\forall i \in \mathbb{N} : s(e_i) = e_{i+1}$. Pokaż że endomorfizm ss^* jest samosprzężonym idempotentem (projekcją). Podaj przykład endomorfizmu $f \in \text{End}(V)$ który jest normalny, ale nie jest ani hermitowski ani unitarny, i którego macierz w bazie kanonicznej nie jest diagonalna.

Zadanie 3. Niech f będzie endomorfizmem hermitowskim. Udowodnij że, jeżeli v_1 i v_2 są wektorami własnymi f odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$.

Zadanie 4. Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową z bazą ortonormalną $\{e_k\}_{k \in I}$. Udowodnij że każdy endomorfizm $f \in \text{End}(V)$ da się jednoznacznie zapisać w postaci $f = f_1 + if_2$, gdzie $f_1^* = f_1$ i $f_2^* = f_2$.

Zadanie 5. Niech $C_0^\infty([0, 1], \mathbb{C})$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji gładkich $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ takich że

$$f(0) = f(1) = 0, \quad \frac{d^k f}{dx^k}(0) = \frac{d^k f}{dx^k}(1) = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

wyposażoną w iloczyn skalarny:

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x) dx.$$

Wykaż że odwzorowanie

$$D : C_0^\infty([0, 1], \mathbb{C}) \ni f \mapsto -i \frac{df}{dx} \in C_0^\infty([0, 1], \mathbb{C})$$

jest odwzorowaniem hermitowskim.

Zadanie 6. W przestrzeni $\mathbb{C}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym odwzorowanie $H \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$ w bazie kanonicznej jest zadane macierzą

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdź że H jest odwzorowaniem hermitowskim. Pokaż że w $\mathbb{C}^3$ istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych H . Sprawdź że macierz przejścia od bazy kanonicznej do tej bazy wektorów własnych jest unitarna.