Algebra z geometrią 2012/2013

Seria XXVI, 20 V 2013 r.

Zadanie 1. Niech V będzie *dowolną* zespoloną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym dopuszczającym bazę ortonormalną. Udowodnij że macierz przejścia z jednej bazy ortonormalnej do drugiej musi być zawsze unitarna.

Zadanie 2. Podaj bazę ortonormalną podprzestrzeni przestrzeni $\mathbb{C}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym generowanej przez wektory

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Wektor $\epsilon_1 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ uzupełnij do bazy ortonormalnej $\mathbb{C}^3$.

Zadanie 4. Dane są dwie macierze zespolone:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Pokaż że A i B są diagonalizowalne i każdy z nich ma bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych.

ii) Zbadaj czy A i B mają wspólne wektory własne.

iii) Sprawdź czy endomorfizm $C = A + i\,B$ jest normalny.

Zadanie 5. Znajdź wszystkie macierze normalne w $M_2(\mathbb{C})$.

Zadanie 6. W przestrzeni rzeczywistych funkcji wielomianowych generowanej przez 1, x, x^2, z iloczynem skalarnym danym przez $\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, skonstruuj bazę ortonormalną.