

# Algebra z geometrią I

## semestr zimowy 2012/2013

Seria III

19 X 2012 r.

**Zad. 1.** Opisać wszystkie grupy  $(G, \circ)$ , dla których zbiór  $G$  ma odpowiednio: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 elementów.

**Zad. 2.** Niech  $(G, \circ)$  będzie grupą zaś  $(H, \circ)$  jej podgrupą. Pokazać, że jeśli  $G$  ma skończoną liczbę elementów, to liczba elementów podgrupy  $H$  jest dzielnikiem liczby elementów  $G$  (twierdzenie Lagrange'a).

**Zad. 3.** Pokazać, że w grupie liczb całkowitych z dodawaniem  $(\mathbb{Z}, +)$  każda jej podgrupa  $(H, +)$  jest postaci  $H = n \cdot \mathbb{Z}$  dla pewnego  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

**Zad. 4.** Udowodnij, że pierścień  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  jest liczbą pierwszą.

**Zad. 5.** Niech  $(G, \circ)$  będzie grupą, a  $(R, +, \cdot)$  pierścieniem. Zbiór

$$R[G] := \{\alpha \in \text{Map}(G, R) \mid \text{dla skończenie wielu } g \in G \alpha(g) \neq 0\}$$

wyposażony w punktowe dodawanie

$$\forall_{g \in G} (\alpha + \beta)(g) := \alpha(g) + \beta(g)$$

i splotowe mnożenie

$$\forall_{g \in G} (\alpha * \beta)(g) := \sum_{h \in G} \alpha(h) \cdot \beta(h^{-1} \circ g)$$

nazywamy *pierścieniem grupowym*. Udowodnij łączność mnożenia splotowego w pierścieniu grupowym.

**Zad. 6.** Udowodnij, że każdy homomorfizm ciał jest injektywny.