

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria VI

9 XI 2012 r.

Zad. 1. Udowodnij *Twierdzenie o dzieleniu wielomianów*.

Jeśli $W(x)$ oraz $P(x)$ są wielomianami i $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to istnieją takie dwa wielomiany $Q(x)$ oraz $R(x)$, że $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$, gdzie $R(x) = 0$ lub stopień $R(x) < \text{stopnia } P(x)$.

Zad. 2. Niech R będzie pierścieniem całkowitym. Udowodnij, że homomorfizm pierścieni przypisujący wielomianom nad R ich funkcje wielomianowe jest iniektywny wtedy i tylko wtedy gdy R jest nieskończony.

Zad. 3.

a) Udowodnij, że każdy wielomian n -tego stopnia $W(z)$ nad $\mathbb{C}$ da się zapisać jako

$$W(z) = \alpha \cdot (z - z_1) \cdot \dots \cdot (z - z_n),$$

gdzie $\alpha, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ i $\alpha \neq 0$,

b) Udowodnij, że każdy wielomian n -tego stopnia $W(x)$ nad $\mathbb{R}$ da się zapisać jako

$$W(x) = \alpha \cdot (x - r_1) \cdot \dots \cdot (x - r_k) \cdot (x^2 + p_1x + q_1) \cdot \dots \cdot (x^2 + p_lx + q_l),$$

gdzie $\alpha, r_1, \dots, r_k, p_1, \dots, p_l, q_1, \dots, q_l \in \mathbb{R}, \forall j \in \{1, \dots, l\} : p_j^2 < 4q_j, k, l \in \mathbb{N}, k + l = n$, i $\alpha \neq 0$.

Zad. 4. Udowodnij, że liczba rzeczywista $\sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \dots}}}$ jest algebraiczna nad $\mathbb{Q}$.

Zad. 5. Przypomnij sobie starożytny dowód nieskończoności zbioru wszystkich liczb pierwszych. W analogiczny sposób udowodnij, że żadne skończone ciało nie jest algebraicznie domknięte.