

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria VII

16 XI 2012 r.

Zad. 1. Przeprowadzić dzielenie z resztą wielomianu

- a) $x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1$ przez $x^2 - 1$,
- b) $x^4 - 1$ przez $x + i$,
- c) $3x^5 + x^4 - 19x^2 - 13x - 10$ przez $x - 2$ i obliczyć wartość w 2.

Zad. 2. Wyrazić funkcję wymierną w postaci sumy ułamków prostych nad ciałem liczb rzeczywistych i zespolonych:

- a) $\frac{3x^5 + x^4 - x^3 - 2x^2}{(x^2 + 2x + 1)(x^4 + x^2 + 1)},$
- b) $\frac{x^2 + 5x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2},$
- c) $\frac{x^2}{x^6 + 1},$
- d) $\frac{x^n - 1}{x^{n+1} - x^n}.$

Zad. 3. Niech x_1, x_2, x_3, x_4 będą różnymi pierwiastkami wielomianu $x^4 + px^3 + q$, gdzie $p \neq q + 1$. Wyjaśnij skąd bierze się ten warunek oraz oblicz sumę

$$\frac{x_1^2}{x_1 + 1} + \frac{x_2^2}{x_2 + 1} + \frac{x_3^2}{x_3 + 1} + \frac{x_4^2}{x_4 + 1}.$$

Zad. 4. Zdefiniujmy stopień niezerowej funkcji wymiernej jako $\deg(\text{licznika}) - \deg(\text{mianownika})$. Udowodnij że tak zdefiniowany stopień zadaje homomorfizm z grupy multiplikatywnej niezerowych funkcji wymiernych w grupę addytywną $\mathbb{Z}$.

Zad. 5. Udowodnij że nad $\mathbb{C}$ stopień wielomianu pierwszego (nieredukowalnego) wynosi 1, nad $\mathbb{R}$ wynosi 1 lub 2, a nad $\mathbb{Q}$ wielomian $x^4 + 1$ jest pierwszy (nieredukowalny).