

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Seria IX

30 XI 2012 r.

Zad. 1. Niech $M_i, i \in I$, będzie niepustą rodziną podmodułów. Udowodnij że $\bigcap_{i \in I} M_i$ jest podmodulem.

Zad. 2. Niech M i N będą dowolnymi R -modułami. Udowodnij że $\text{Hom}_R(M, N)$ jest grupą abelową ze względu na dodawanie punktowe, a $\text{Hom}_R(M, M) =: \text{End}_R(M)$ pierścieniem ze względu na punktowe dodawanie i składanie odwzorowań.

Zad. 3. Niech N i N' będą podmodułami. Udowodnij że $N + N'$ jest podmodulem oraz że mamy izomorfizm modułów

$$N/(N \cap N') \cong (N + N')/N'.$$

Zad. 4. Udowodnij że jeśli $M \supseteq M' \supseteq M''$ są modułami, to mamy izomorfizm modułów

$$(M/M'')/(M'/M'') \cong M/M'.$$

Zad. 5. Niech $f \in \text{Hom}_R(M, M')$ i niech N' będzie podmodulem M' . Udowodnij, że $f^{-1}(N')$ jest podmodulem M oraz że odwzorowanie $M/f^{-1}(N') \ni [m] \mapsto [f(m)] \in M'/N'$ jest injektywnym homomorfizmem modułów.

Zad. 6. Niech

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

będzie przemiennym diagramem homomorfizmów modułów. Udowodnij że jeśli wiersze są ciągami dokładnymi a f_1, f_2, f_4, f_5 izomorfizmami, to f_3 też jest izomorfizmem.