

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Zadania domowe (Seria A)

Zadanie 1. Zdefiniuj grupę i homomorfizm grup. Niech ψ przeprowadza grupę $(G, \cdot)$ w grupę bijekcji zbioru G tak że $\forall_{g \in G} \forall_{x \in G} [\psi(g)](x) = g \cdot x$. Udowodnij że ψ jest homomorfizmem grup.

Zadanie 2. Zbadaj czy jest grupą zbiór:

- a) $X := \{ \frac{m}{2^n} : m, n \in \mathbb{Z} \} \subset \mathbb{R}$ z działaniem dodawania liczb rzeczywistych.
- b) $Y := \{ z \in \mathbb{C} : \exists_{n \in \{1, 2, 3, \dots\}} z^n = 1 \}$ z mnożeniem liczb zespolonych.
- c) $Z := \{ z \in \mathbb{C} : |z| \in \{2^n : n = 0, 1, 2, \dots\} \}$ z mnożeniem liczb zespolonych.

Zadanie 3. Sprawdź że grupa G symetrii kwadratu jest izomorficzna z 8-elementową podgrupą grupy permutacji S_4 . Podaj tabelkę działania grupowego oraz wyznacz wszystkie podgrupy G .

Zadanie 4. Niech $A_4 := \{ \sigma \in S_4 : \text{sign}(\sigma) = 1 \}$. Sprawdź że A_4 jest 12-elementową podgrupą S_4 i wykaż że A_4 nie ma podgrupy 6-elementowej.

Zadanie 5. Dane są dwie permutacje σ i τ na zbiorze $\{1, \dots, n\}$ w postaci tabelarycznej.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Znajdź znak permutacji σ i τ .
- b) Znajdź σ^n dla $n \in \mathbb{N}$.
- c) Znajdź permutację ρ spełniającą równość $\tau = \sigma \circ \rho$.

Zadanie 6. Zdefiniuj ciało i pierścień. Niech K będzie ciałem. Udowodnij że pierścień $\text{Map}(X, K)$ z działaniami punktowymi jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy X jest zbiorem jednoelementowym.

Zadanie 7. Niech R będzie dowolnym pierścieniem, $r, s \in R$. Udowodnij że

$$\exists (rs - 1)^{-1} \in R \quad \Leftrightarrow \quad \exists (sr - 1)^{-1} \in R.$$

Zadanie 8. Zbadaj czy $K := \{ a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Q} \} \subseteq \mathbb{R}$ jest podciałem ciała liczb rzeczywistych.

Zadanie 9. Zbadaj czy $K := \{ a + bi : a, b \in \mathbb{Q} \} \subseteq \mathbb{C}$ jest podciałem ciała liczb zespolonych.

Zadanie 10. Oblicz wyrażenia:

- a) $\frac{(1+i)^n}{2(1-i)^{n-2}}, (n = 3, 4, 5, \dots),$
- b) $\frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i\sqrt{3})^4} + (1+i)(3-i),$
- c) $\varepsilon^n + \bar{\varepsilon}^3, (n = 1, 2, \dots),$ gdzie $\varepsilon \neq 1$ jest rozwiązaniem równania $z^3 = 1$.

Zadanie 11. Przedstaw w postaci trygonometrycznej $(2 - \sqrt{3}) - i$.

Zadanie 12. Wyraż $\sin^6 x$ przez kombinacje funkcji trygonometrycznych wielokrotności kąta x oraz wyraż $\cos 5x$ przez $\sin x$ i $\cos x$.

Zadanie 13. Niech $S^1 := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$. Opisz $\phi(S^1)$ dla

- a) $\phi(z) := z + \frac{1}{z} + 2 - i.$
- b) $\phi(z) := z + \frac{2}{z} + 1.$

Zadanie 14. Oblicz sumy:

$$S = \sum_{k=1}^n \cos^2 kx, \quad T = \sum_{k=1}^n \sin^2 kx.$$

Zadanie 15. Wykazać równość

a) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \cos \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}$, dla $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
b) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \sin \frac{1}{2}(n+1)x}{\sin \frac{1}{2}x}$, dla $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 16. Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania $|z+i| + |z-i| = 2$.

Zadanie 17. Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równania

$$z^3 - 6z^2 + 12z - \bar{z} - 6 = 0.$$

Naszkicuj zbiór rozwiązań na płaszczyźnie zespolonej.

Zadanie 18. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianów zespolonych:

- a) $z^2 - 8 + 15i$,
b) $z^2 - (3 + 7i)z - 10 + 11i$,
c) $z^4 + 8z^3 + 16z^2 + 9$,
d) $z^3 + 3z^2 - z + 4$.

Zadanie 19. Nie korzystając z algorytmu dzielenia wielomianów z resztą znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $w(x) = 1 + x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ przez wielomian:

- a) $x^2 - 1$, b) $x^2 + 1$, c) $x^4 - 1$.

Zadanie 20. Pokazać, że dla $n = 2, 3, 4, \dots$ wielomian

$$w(x) = (\cos \alpha - x^2 \sin \alpha)^n - \cos n\alpha + x^2 \sin n\alpha.$$

jest podzielny przez wielomian $x^4 + 1$.

Zadanie 21. Podaj warunki konieczne i dostateczne na współczynniki wielomianów, aby wielomian $x^2 + ax + 1$ był dzielnikiem wielomianu $x^4 + px + q$.

Zadanie 22. Znaleźć największy wspólny dzielnik wielomianów:

- a) $p(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$, $q(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6$.
b) $p(x) = x^5 - x^3 + 2x^2 - 2x + 2$, $q(x) = x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 2x + 6$.

Zadanie 23. Rozłóż na ułamki proste (nad $\mathbb{R}$):

- a) $\frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 5x + 6)}$,
b) $\frac{4x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1}$.