

Algebra z geometrią I

semestr zimowy 2012/2013

Zadania domowe (Seria B)

Zadanie 1. Niech V_1 i V_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni $\mathbb{R}^4$ opisanymi układami równań liniowych odpowiednio U_1 i U_2 :

$$U_1 : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}, \quad U_2 : \begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + 10x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}.$$

Znaleźć bazy i wymiary przestrzeni $V_1 + V_2$ oraz $V_1 \cap V_2$.

Zadanie 2. Funkcje u, v na zbiorze $X \neq \emptyset$ pełnią następujący warunek: każda kombinacja liniowa u i v jest funkcją stałego znaku, tzn. ≥ 0 na całym X lub ≤ 0 na całym X . Dowieść że u i v są liniowo zależne.

Zadanie 3. Zbadaj czy podzbiór $W := \{w \in \mathbb{R}_4[\mathbb{N}] \mid w(-1) = w(1), w'(1) = 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_4[\mathbb{N}] := \{w \in \mathbb{R}[\mathbb{N}] \mid \deg w \leq 4\} \cup \{0\}$. Jeśli tak, to zaproponuj bazę W i oblicz $\dim(W)$.

Zadanie 4. Wykazać że następujący układ wektorów jest liniowo zależny, ale każda wybrana czwórka wektorów jest liniowo niezależna:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 5. Określ wymiar i znajdź bazy podprzestrzeni w $\mathbb{R}^5$ zadanych przez układy równań:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_3 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 1x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 1x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 1x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \end{cases}$$

Zadanie 6. Rozwiązać układ równań

$$\text{a) } \begin{cases} -4x + 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ x + 2y - 4z = 1 \end{cases},$$

$$\text{b) } \begin{cases} -5x + 2y + z = 1 \\ 2x - 2y + 2z = 2 \\ x + 2y - 5z = 1 \end{cases},$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 4y + 2z = 2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 7. Rozwiązać układ równań w zależności od wartości parametru a :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = 1 \end{cases},$$

$$\text{b) } \begin{cases} (3a - 1)x + 2ay + (3a + 1)z = 1 \\ 2ax - 2ay(3a + 1)z = a \\ (a + 1)x + (a + 1)y + (2a + 2)z = a^2 \end{cases}.$$

Zadanie 8. Znaleźć $\ker(A)$ i $\text{im}(A)$ dla odwzorowania $A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ zadanego w bazie standardowej przez macierz

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9. Endomorfizm $F \in \text{End}(\mathbb{R}_n[\mathbb{N}])$, gdzie $\mathbb{R}_n[\mathbb{N}] := \{w \in \mathbb{R}[\mathbb{N}] \mid \deg w \leq n\} \cup \{0\}$ dany jest wzorem $(Fw)(t) = (t+1)w'(t)$. Znaleźć macierz F w bazie uporządkowanej $(1, t, t^2, \dots, t^n)$ oraz znaleźć $\ker(F)$ i $\text{im}(F)$.

Zadanie 10. Czy przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (x_1 + 2)^2 - x_1 - x_3 - 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 \end{pmatrix},$$

jest przekształceniem liniowym? Jeśli tak, to napisać macierz tego przekształcenia w bazie kanonicznej.

Zadanie 11. Znaleźć wzór na przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadane następującymi warunkami

$$\varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 12. Niech

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Obliczyć: $\text{Tr } ABC$, $\text{Tr } ACB$ oraz wyznaczniki macierzy A , B , C , AB , ABC .

Zadanie 13. Udowodnij że, jeśli $n > 1$, to nie istnieje homomorfizm pierścieni z $M_n(\mathbb{C})$ w $\mathbb{C}$.

Zadanie 14. Pierścieniem Cuntz'a R_n nazywamy pierścień zawierający elementy $r_1, \dots, r_n, s_1, \dots, s_n$ takie że $\sum_{i=1}^n r_i s_i = 1$ oraz $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : s_i r_j = \delta_{ij}$. Udowodnij że moduły R_n^n i R_n są izomorficzne.

Zadanie 15. Rozpatrzmy $\mathbb{R}^n$ jako lewy $M_n(\mathbb{R})$ -moduł. Udowodnij że każda $M_n(\mathbb{R})$ -liniowa surjekcja $f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ rozszczepia się.

Zadanie 16. Niech $0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$ będzie ciągiem dokładnym skończeniowymiarowych przestrzeni wektorowych. Udowodnij że $\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim V_i = 0$.