

Algebra z geometrią II 2012/2013

Zadania domowe (Seria C)

Zadanie 1. Rozwiąż układ równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

Zadanie 2. W zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, rozwiąż układy równań liniowych:

$$a) \begin{cases} y + az + a^2t = 1 \\ x + a^2z + at = -1 \\ ax + a^2y + t = 1 \\ a^2x + ay + z = -1 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} ax + by = 2ab \\ bx + ay = a^2 + b^2 \end{cases}.$$

Zadanie 3. Wyznacz spektrum macierzy

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}^n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 4. Niech $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Udowodnij że $\text{spec}_{M_n(\mathbb{C})}(AB) = \text{spec}_{M_n(\mathbb{C})}(BA)$.

Zadanie 5. Niech $f \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$ będzie (niezerowym) endomorfizmem nilpotentnym. Udowodnij, że istnieje taka baza $\mathbb{C}^2$ w której macierz endomorfizmu f jest postaci

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 6. Oblicz wartości, wektory i podprzestrzenie własne macierzy

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

rozważanej raz jako element $M_6(\mathbb{R})$ a raz jako element $M_6(\mathbb{C})$.

Zadanie 7. Dana jest macierz

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Oblicz funkcję $f(A)$ w przypadku, gdy

$$a) f(x) = \begin{pmatrix} x \\ 10 \end{pmatrix} := \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-9)}{10!}; \quad b) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}; \quad c) f(x) = \sin \pi x.$$

Zadanie 8. Niech

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Znajdź wartości i wektory własne macierzy B . Czy macierz B jest diagonalizowalna?

Zadanie 9. Sprawdź że funkcjonały liniowe $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ określone wzorami:

$$\omega^k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2kx_k - x_1 - x_2 - x_3, \quad k = 1, 2, 3,$$

tworzą bazę przestrzeni $(\mathbb{R}^3)^*$. Znajdź w tej bazie macierz endomorfizmu transponowanego $f^T \in \text{End}((\mathbb{R}^3)^*)$, gdzie

$$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 10. Niech $V := \mathbb{R}_2[t]$ będzie przestrzenią rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2, $\delta \in \text{End}(V)$, $(\delta v)(t) = v'(t)$. Niech $\omega^k \in V^*$ będzie zadane przez $\omega^k(v) = v(k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Pokaż że funkcjonały liniowe $\omega^0, \omega^1, \omega^2$ stanowią bazę przestrzeni V^* . Znajdź taką bazę przestrzeni V do której jest ona dualna. Wyraż $\delta^T(\omega^{-1})$ jako kombinację liniową $\omega^0, \omega^1, \omega^2$.