

# Algebra z geometrią II 2012/2013

## Zadania domowe (Seria D)

**Zadanie 1.** Niech  $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  będzie formą biliniową której macierz w bazie standardowej to

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Sprawdź że odwzorowanie

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := b(\mathbf{x}, A\mathbf{y}) \in \mathbb{R}, \quad A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

jest formą dwuliniową. Oblicz jej macierz w bazie standardowej.

**Zadanie 2.** Niech

$$B := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

będzie macierzą formy dwuliniowej  $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  w bazie kanonicznej  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Oblicz macierz  $b$  w bazie  $\{e_1 + e_2, e_1 - e_2, e_3\}$ .

**Zadanie 3.** Pokaż że odwzorowanie  $M_2(\mathbb{R}) \ni A \mapsto \det A \in \mathbb{R}$  jest formą kwadratową. Podaj macierz tej formy w bazie  $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ , gdzie elementy macierzowe dane są wzorem  $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ . Znajdź bazę diagonalizującą tę formę.

**Zadanie 4.** Znajdź bazę diagonalizującą formę kwadratową  $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$  daną wzorem

$$a) \quad Q(x) = x_1x_2 + 4x_2x_3 + 6x_3x_1, \quad V = \mathbb{R}^3, \quad b) \quad Q(X) = \det X, \quad V = M_2(\mathbb{R}).$$

**Zadanie 5.** Sprawdź że odwzorowanie  $b : M_N(\mathbb{R}) \times M_N(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dane wzorem

$$b(A, B) := \text{Tr}(A^T B).$$

jest dwuliniowe. Zbadaj czy stowarzyszona z nim forma kwadratowa jest dodatnio określona.

**Zadanie 6.** W zależności od parametru  $a \in \mathbb{R}$ , określ sygnaturę następujących form kwadratowych na przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ :

$$Q_1(x) = x_1^2 + ax_1x_2 + x_2^2 - x_3^2, \quad Q_2(x) = ax_1x_2 + x_3^2, \quad Q_3(x) = a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1).$$

**Zadanie 7.** Udowodnij że odwzorowanie  $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}$  dane wzorem

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

gdzie  $a_{ij}$  to element w pozycji  $(i, j)$  macierzy  $A$ , jest normą na  $M_n(\mathbb{C})$ .

**Zadanie 8.** Zbadaj które z następujących odwzorowań  $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \ni (x, y) \mapsto b(x, y) \in \mathbb{C}$  jest iloczynem skalarnym na  $\mathbb{C}^3$ :

- i)  $b(x, y) := \bar{x}_1 y_1 + 2\bar{x}_1 y_2 - \bar{x}_1 y_3 + \bar{x}_2 y_1 + 3\bar{x}_2 y_2 + 4\bar{x}_2 y_3 + \bar{x}_3 y_1 + \bar{x}_3 y_2 + 2\bar{x}_3 y_3$ ,
- ii)  $b(x, y) := 2\bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_1 y_2 - \bar{x}_1 y_3 + \bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_2 - 2\bar{x}_2 y_3 - \bar{x}_3 y_1 - 2\bar{x}_3 y_2 + 6\bar{x}_3 y_3$ ,
- iii)  $b(x, y) := \bar{x}_1 y_1 - \bar{x}_1 y_2 + \bar{x}_1 y_3 - \bar{x}_2 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \bar{x}_2 y_3 + \bar{x}_3 y_1 + \bar{x}_3 y_2 + 5\bar{x}_3 y_3$ .

**Zadanie 9.** Niech  $H \in \text{End}(\mathbb{C}^N)$  będzie endomorfizmem hermitowskim względem standardowego iloczynu skalarnego. Pokaż że  $U := e^{iH}$  jest endomorfizmem unitarnym.

**Zadanie 10.** Niech  $f : V \rightarrow V$  będzie endomorfizmem zespolonej przestrzeni wektorowej  $V$  z iloczynem skalarnym i bazą ortonormalną. Wykaż że

- $\ker f^* = (\text{Im } f)^\perp$ ,
- $\text{Im } f \subseteq (\ker f^*)^\perp$ ,
- $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty \Rightarrow (\ker f^*)^\perp = \text{Im } f$ .

Podaj przykład endomorfizmu  $f : V \rightarrow V$  dla którego  $(\ker f^*)^\perp \neq \text{Im } f$ .

**Zadanie 11.** Sprawdź że macierz zespolona

$$N := \begin{pmatrix} 4 + 3i & 4i & -6 - 2i \\ -4i & 4 - 3i & -2 - 6i \\ 6 + 2i & -2 - 6i & 1 \end{pmatrix}$$

jest normalna.

- i) Znajdź bazę ortonormalną złożoną z wektorów własnych  $N$ .
- ii) Podaj rozkład  $N = H_1 + iH_2$ , gdzie  $H_1$  i  $H_2$  są hermitowskie.
- iii) Znajdź wartości własne  $H_1$  i  $H_2$ .

**Zadanie 12.** Skonstruuj bazę ortonormalną podprzestrzeni (przestrzeni  $\mathbb{C}^4$  ze standardowym iloczynem skalarnym) rozpinanej przez

- $(1, 2, 2, -1)^T, (1, 1, -5, 3)^T, (3, 2, 8, -7)^T$ ,
- $(1, 1, -1, -2)^T, (5, 8, -2, -3)^T, (3, 9, 3, 8)^T$ ,
- $(2, 1, 3, -1)^T, (7, 4, 3, -3)^T, (1, 1, -6, 0)^T, (5, 7, 7, 8)^T$ .

**Zadanie 13.** W przestrzeni  $\mathbb{C}^4$  ze standardowym iloczynem skalarnym odwzorowanie  $f \in \text{End}(\mathbb{C}^4)$  w bazie kanonicznej jest zadane macierzą

$$f = \begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{3} & 0 & 0 \\ i\sqrt{3} & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 2i & 0 & -i\sqrt{3} \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Podaj rozkład spektralny  $f$ .

**Zadanie 14.** W przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  ze standardowym iloczynem skalarnym odwzorowanie  $h \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$  w bazie kanonicznej jest zadane macierzą

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 1 & i \\ 1 & -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Podaj rozkład biegunowy  $h$ .