ALGEBRA I

Andrzej Białynicki-Birula:

"Algebra jest jedną z głównych obok analizy i geometrii gałęzi matematyki. Jest to również jeden z najstarszych jej działów. Początkowo algebra była nauką o rozwiązywaniu równań i stąd wywodzi się jej nazwa (słowo algebra związane jest z terminem arabskim al-dżabr dotyczącym operacji dodawania do obu stron równania tej samej liczby)."

Przykład 1: Jak rozwiązać równanie kwadratowe $x^2+ax+b=0$? Stosujemy podstawienie $x=:t-\frac{a}{2}$ eliminujące człon liniowy ax:

$$x^2+ax+b=0$$

$$\left(t-\frac{a}{2}\right)+a\left(t-\frac{a}{2}\right)+b=0$$

$$t^2-at+\frac{a^2}{4}+at-\frac{a^2}{2}+b=0$$

$$t^2-\frac{a^2}{4}+b=0, \quad t^2=\frac{a^2}{4}-b$$

$$t=\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=\pm\frac{\sqrt{a^2-4b}}{2}=$$

$$\boxed{x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}}$$

Rozwiązywanie równań często wymusza poszerzanie zbioru współczynników równania do zbioru rozwiązań.

(1) Równanie $x+1=0$ ma współczynniki naturalne, ale jego rozwiązanie $x=-1$ jest ujemną liczbą całkowitą.

② Równanie $2x - 1 = 0$ ma współczynniki całkowite, ale jego rozwiązanie $x = \frac{1}{2}$ jest niecałkowitą liczbą wymierną.

③ Równanie $\frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$ ma współczynniki wymierne, ale jego rozwiązania $x = \pm\sqrt{2}$ są niewymiernymi liczbami rzeczywistymi.

④ Równanie $x^2 + 2 = 0$ ma współczynniki naturalne (całkowite, wymierne, rzeczywiste), ale jego rozwiązania ~~(x =~~ $\pm i\sqrt{2}$ są (niewymiernymi) liczbami zespolonymi.

Zasady zaliczania:

① Ćwiczenia: kolokwia plus punkty od prowadzących ćwiczenia $\geq 50\%$

② Egzamin: pisemny $\xrightarrow{\geq 50\%}$ ustny.

SEMESTR ZIMOWY

ALGEBRA OGÓLNA

Motywacja: rozwiązywanie równań dowolnego stopnia.

ALGEBRA LINIOWA

Motywacja: rozwiązywanie układów równań liniowych.

Algebra ogólna:

1. Zbiory, relacje i liczby
2. Grupy, pierścienie i ciała
3. Ciało liczb zespolonych
4. Algebra wielomianów

Algebra liniowa:

1. Przestrzenie wektorowe
2. Odwzorowania liniowe
3. Macierze odwzorowań
4. Wyznaczniki macierzy

ZBIORY, RELACJE I LICZBY

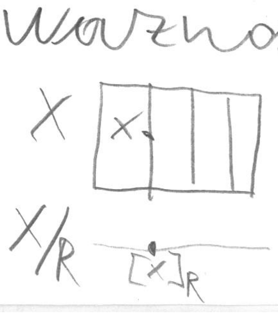
Relacja równoważności w zbiorze X to podzbiór $R \subseteq X \times X$ spełniający

1. $\forall x \in X: (x,x) \in R$ (zwrotność)
2. $(x,y) \in R \iff (y,x) \in R$ (symetryczność)
3. $(x,y), (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$ (przechodniość)

Klasa równoważności $x \in X$ względem relacji R to $[x]_R := \{y \in X \mid (x,y) \in R\}$.

Iloraz zbioru przez relację równoważności $X/_R := \{[x]_R \in 2^X \mid x \in X\}$.

Relacja równoważności rozcina zbiór X na rozłączne klasy równoważności (warstwy) bo $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Rightarrow [x]_R = [y]_R$. X/R to zbiór wszystkich klas równoważności w X. Mamy $X = \bigcup_{x \in X} [x]_R$,



Liczby naturalne $\mathbb{N}$ konstruujemy jako zbiory $\emptyset$ $\{\emptyset\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$
0 1 2 3 ...

Dodawanie $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}$ definiujemy tak: $m+n$ to jedyny zbiór w $\mathbb{N}$ równoliczny z $(m\times\{\emptyset\})\cup(n\times\{\{\emptyset\}\})$.

Mnożenie $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{N}$ definiujemy podobnie: $m\cdot n$ to jedyny zbiór w $\mathbb{N}$ równoliczny ze zbiorem $m\times n$.

Liczby całkowite $\mathbb{Z} := (\mathbb{N}\times\mathbb{N})/R_{\mathbb{Z}}$,

$R_{\mathbb{Z}} := \{((m,n),(p,q))\in\mathbb{N}^4 \mid p+n = m+q\}$.

$\mathbb{N}\ni n \longmapsto [(n,0)]\in\mathbb{Z}$ jest injekcją; $-n := [(0,n)]$,

$[(m,n)]+[(p,q)] := [(m+p,\ n+q)]$,

$[(m,n)]\cdot[(p,q)] := [(mp+nq,\ mq+np)]$.

Liczby wymierne $\mathbb{Q} := (\mathbb{Z}\times(\mathbb{N}\setminus\{0\}))/R_{\mathbb{Q}}$.

Liczby rzeczywiste $\mathbb{R} := \mathrm{Cauchy}(\mathbb{N},\mathbb{Q})/R_{\mathbb{R}}$.

Liczby zespolone $\mathbb{C} := \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.