MACIERZE ODWZOROWAŃ LINIOWYCH

Niech I i J będą niepustymi zbiorami a R pierścieniem. Macierzą $I \times J$ o współczynnikach w R nazywamy odwzorowanie $M : I \times J \longrightarrow R$. Wartości M nazywamy elementami macierzowymi i oznaczamy $M_{ij} := M((i,j))$. Zbiór wszystkich takich macierzy oznaczamy przez $M_{I \times J}(R)$. Jeśli $I = J$, to piszemy w skrócie $M_I(R)$. Elementy $M_I(R)$ nazywamy macierzami kwadratowymi. Jeśli $I = \{1, \dots, n\}$, to używamy oznaczenia $M_n(R) := M_I(R)$.

Analogicznie, $M_{kl}(R)$ oznacza $M_{I \times J}(R)$ dla $I = \{1, \dots, k\}$ i $J = \{1, \dots, l\}$. Skończone kwadratowe macierze o współczynnikach w ciele będą podstawowym obiektem naszych zainteresowań.

Wierszem i-tym macierzy M nazywamy odwzorowanie $J \ni j \xrightarrow{R_i} M_{ij} \in R$. Kolumną j-tą macierzy M nazywamy odwzorowanie $I \ni i \xrightarrow{C_j} M_{ij} \in R$.

Niech V, W i Z będą wolnymi prawymi R-modułami o bazach odpowiednio I, J i K. Niech $f \in Hom_R(V, W)$ i $g \in Hom_R(W, Z)$. Wtedy $g \circ f \in Hom_R(V, Z)$.

Macierzą odwzorowania liniowego f w bazach I i J nazywamy odwzorowanie $J \times I \ni (j, i) \xrightarrow{M_f} f_{ji} \in R$, gdzie f_{ji} jest jedynym elementem R spełniającym równanie $f(i) = \sum_{k \in J} k f_{ki}$. Jedyność wynika z jednoznaczności współczynników rozwinięcia w danej bazie.

Przykład: $R = \mathbb{Z}$, $V = \mathbb{Z}^2$, $W = \mathbb{Z}^3$,

$I = \{(1,0), (0,1)\}$, $J = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$,

$$\mathbb{Z}^2 \ni (m,n) \xmapsto{f} (m+n, m-n, 2m) \in \mathbb{Z}^3.$$

$$f((1,0)) = (1,1,2) = (1,0,0)1 + (0,1,0)1 + (0,0,1)2,$$

$$f((0,1)) = (1,-1,0) = (1,0,0)1 + (0,1,0)(-1) + (0,0,1)0.$$

Porządkując bazy I i J jak wyżej otrzymujemy następujący wykres odwzorowania M_f:

$$j\{\underbrace{(f_{ji})}_{i} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1,0) & (0,1) \end{matrix} & \end{array}.$$

Uwaga: Wykres odwzorowania definiuje odwzorowanie, więc można te pojęcia utożsamić i nazywać wykresy macierzy macierzami.

Zauważmy że każda kolumna macierzy odwzorowania liniowego ma zawsze skończoną ilość niezerowych wartości bo rozwinięcie w bazie jest zawsze skończone. Odwrotnie, dowolna macierz $M : J \times I \to R$ o tej własności zadaje odwzorowanie liniowe:

$$V \ni v \xmapsto{f_M} \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} {}_j M_{ji}\, v_i \,, \quad \text{gdzie } v =: \sum_{i \in I} {}^i v_i .$$

Jest oczywiste że $M_{f_M} = M$; $f_{M_f} = f$.

<u>Wniosek</u>: Macierz odwzorowania liniowego przekształca współczynniki wg wzoru

$$f(v) = \sum_{j \in J} {}_j w_j \iff \boxed{w_j = \sum_{i \in I} f_{ji} v_i} \,,$$

gdzie $v = \sum_{i \in I} {}^i v_i$.

<u>Mnożenie macierzy</u> $M : I \times J \to R$ i $N : J \times K \to R$ takich że wszystkie wiersze M lub wszystkie kolumny N mają skończoną ilość niezerowych wartości

zdefiniowane jest wzorem

$$\boxed{(MN)_{ik} := \sum_{j\in J} M_{ij} N_{jk}}.$$

O współczynnikach $v \in V$ możemy myśleć jako o macierzy odwzorowania liniowego $R \ni r \mapsto vr \in V$ w bazach odpowiednio $\{1\}$ i I: $v_{i1} = v_i$. Zatem współczynniki przekształcają się przez mnożenie macierzy.

<u>Przykład</u>: Odwzorowanie liniowe

$$\mathbb{Z}^2 \ni (m,n) \longmapsto (m+n,\, m-n,\, 2m) \in \mathbb{Z}^3$$

w kanonicznej bazie zapisuje się jako mnożenie macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m+n \\ m-n \\ 2m \end{pmatrix}$$

Jak wyliczyć $M_{g\circ f} : K \times I \longrightarrow R$ znając $M_f : J \times I \to R$ i $M_g : K \times J \to R$?

Także przez mnożenie macierzy!

$$(g\circ f)(i) = g\Big(\sum_{j\in J} j f_{ji}\Big) = \sum_{j\in J} g(j) f_{ji}$$

$$= \sum_{j\in J}\Big(\sum_{k\in K} k\, g_{kj}\Big) f_{ji} = \sum_{k\in K} k \Big(\sum_{j\in J} g_{kj} f_{ji}\Big)$$

$$\Rightarrow (g\circ f)_{ki} = \sum_{j\in J} g_{kj} f_{ji} \Leftrightarrow \boxed{M_{g\circ f} = M_g M_f}$$

Przykład: $R = \mathbb{Z}$, f jak poprzednio,

$\mathbb{Z}^3 \ni (p,q,r) \overset{g}{\mapsto} (2p+r, q) \in \mathbb{Z}^2.$

Wtedy $(g\circ f)((m,n)) = g((m+n, m-n, 2m)) =$

$= (4m+2n, m-n)$. Z drugiej strony,

$$g((1,0,0)) = (2,0) = (1,0)2 + (0,1)0$$
$$g((0,1,0)) = (0,1) = (1,0)0 + (0,1)1$$
$$g((0,0,1)) = (1,0) = (1,0)1 + (0,1)0,$$

skąd $M_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Zatem $M_{g\circ f} =$

$$M_g M_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

To się zgadza z

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m+2n \\ m-n \end{pmatrix}.$$