ŚLADY I WYZNACZNIKI

Niech k będzie niezerowym pierścieniem <u>przemiennym</u>.

<u>Śladem</u> nazywamy odwzorowanie

$$\boxed{M_n(k) \ni A \xmapsto{tr} tr(A) := \sum_{i=1}^{n} A_{ii} \in k, \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}.$$

<u>Twierdzenie</u>: $\forall A, B \in M_n(k)$:

① $tr(AB) = tr(BA)$,

② $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$.

<u>Dowód</u>: ① $tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji} =$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ji} A_{ij} = tr(BA)$

② $tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n} (A_{ii} + B_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii} + \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$

$= tr(A) + tr(B)$ ∎

<u>Wniosek</u>: <u>Nie</u> istnieje skończenie wymiarowa nad ciałem o charakterystyce zerowej realizacja reguły komutacji $[X, P] = I$ mechaniki kwantowej.

Dowód: Wyrażenie $[X,P]:=XP-PX$ nazywane jest komutatorem. Podstawową cechą śladu jest anihilowanie wszelkich komutatorów: $tr([X,P])=tr(XP)-tr(PX)=tr(PX)-tr(PX)=0$. Z drugiej strony, $tr(I)=\sum_{i=1}^{n}1=n\neq 0$ z zerowości charakterystyki ciała. ∎

Niech V będzie skończenie wymiarowym wolnym modułem nad niezerowym przemiennym pierścieniem k. Śladem endomorfizmu $f\in End(V)$ nazywamy

$$\boxed{tr(f):=tr(M_{BB}(f))},$$ gdzie B jest dowolną bazą V. Definicja nie zależy od wyboru bazy bo $tr(M_{CC}(f))=tr(M_{CB}(id)M_{BB}(f)M_{BC}(id))$
$=tr(M_{BC}(id)M_{CB}(id)M_{BB}(f))=tr(M_{BB}(id)M_{BB}(f))$
$=tr(M_{BB}(f))$. Ponadto natychmiast wnioskujemy że $\forall f,g\in End(V): tr(f\circ g)=tr(g\circ f)$ i $tr(f+g)=tr(f)+tr(g)$.

Wyznacznikiem nazywamy odwzorowanie

$$M_n(k) \ni A \xmapsto{det} \det(A) \in k, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

$$\boxed{\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i\sigma(i)}}.$$

Własności: ① $\det(I) = \operatorname{sgn}(id) \prod_{i=1}^{n} \delta_{ii} = 1$

② Zapisując macierze jako wiersze kolumn rozumianych jako elementy modułu wolnego k^n, otrzymujemy:

Ⓐ $\forall i \in \{1, \dots, n\}: \det(A_1, \dots, A_i + B_i, \dots, A_n) = \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, B_i, \dots, A_n)$

Ⓑ $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \lambda \in k: \det(A_1, \dots, \lambda A_i, \dots, A_n) = \lambda \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n)$

Ⓒ $\forall i < j: \det(A_1, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-e miejsce}}}{A_i}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-e miejsce}}}{A_i}, \dots, A_n) = 0$

Dowód A: $\det(A_1, \dots, A_i + B_i, \dots, A_n) =$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\sigma^{-1}(i)\}} A_{m\sigma(m)} \left(A_{\sigma^{-1}(i)i} + B_{\sigma^{-1}(i)i} \right) =$$

$$= \det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_n) + \det(A_1, \dots, B_i, \dots, A_n) \blacksquare$$

Dowód B: Analogiczny do (A).

Dowód C: $\det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \prod_{m=1}^{n} A_{m\sigma^{-1}(m)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^{n} A_{\sigma(m)m}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^{n} A_{\sigma(m)m} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^{n} A_{\sigma(m)m}$$

$$= \text{———} \quad \text{〃} \quad \text{———} + \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau_{ij}) \prod_{m=1}^{n} A_{\sigma(\tau_{ij}(m))m}$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(\prod_{m=1}^{n} A_{\sigma(m)m} - \prod_{m=1}^{n} A_{\sigma(\tau_{ij}(m))m} \right)$$

$$= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}} A_{\sigma(m)m} \left(A_{\sigma(i)i} A_{\sigma(j)j} - A_{\sigma(j)i} A_{\sigma(i)j} \right)$$

$$= 0 \quad \blacksquare$$

<u>Twierdzenie:</u> Jeśli $F \in Map(M_n(k), k)$ posiada 4 powyższe własności, to $F = \det$.

<u>Dowód</u>: Niech $\{e_i\}_{i=1}^n$ będzie bazą standardową k^n. Wtedy $F(A) = F(A_1, \ldots, A_n)$

$$= F\left(\sum_{i_1=1}^n e_{i_1} A_{i_1 1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^n e_{i_n} A_{i_n n}\right) =$$

$$= \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^n F(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) A_{i_1 1} \ldots A_{i_n n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} F(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) A_{\sigma(1) 1} \ldots A_{\sigma(n) n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) F(e_1, \ldots, e_n) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(m) m} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^n A_{\sigma(m) m} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{m=1}^n A_{m \sigma(m)} = \det A.$$

Skorzystaliśmy tu z implikacji

$$0 = F(A_1, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_i + A_j, \ldots, A_n) = F(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + F(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots A_n) \Rightarrow F(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = - F(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n).$$ ∎

Twierdzenie: $\forall A, B \in M_n(k)$: $\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B)}$

Dowód: Zauważmy że odwzorowanie

$M_n(k) \ni B \longmapsto \det(AB) \in k$ spełnia

warunki (A), (B) i (C) bo $\det(AB) =$

$= \det(AB_1, \ldots, AB_n)$, gdzie $B =: (B_1, \ldots, B_n)$.

Zatem rozumując jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia otrzymujemy

$$\det(AB) = \det(Ae_1, \ldots, Ae_n)\det(B)$$

$$= \det(A(e_1, \ldots, e_n))\det(B) = \det(A)\det(B).$$

■

Wyznacznikiem endomorfizmu $f \in \mathrm{End}(V)$

nazywamy $\boxed{\det(f) := \det(M_{BB}(f))}$, gdzie

B jest dowolną bazą V. Korzystając z powyższego twierdzenia widzimy że definicja nie zależy od wyboru bazy: $\det(M_{CC}(f))$

$= \det(M_{CB}(id) M_{BB}(f) M_{BC}(id)) = \det(M_{BC}(id) M_{CB}(id) M_{BB}(f))$

$= \det(M_{BB}(f))$.