ODWRACANIE MACIERZY I INNE UCIECHY

Odwracanie macierzy to podawanie rozwiązań układów równań liniowych. Ze wzoru $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ wnioskujemy natychmiast że wyznacznik macierzy odwracalnej musi być odwracalny:

$$1 = \det(I) = \det(A A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$
$$= \det(A^{-1})\det(A).$$ Okazuje się że przeciwna implikacja też jest prawdziwa. Przy pomocy $\det(A)^{-1}$ możemy napisać jawny wzór na A^{-1}. W tym celu zdefiniujmy najpierw:

① <u>Dopełnieniem algebraicznym</u> elementu A_{ij} macierzy $A \in M_n(K)$ nazywamy wyznacznik macierzy $(n-1)\times(n-1)$ otrzymanej przez skreślenie i-ego wiersza i j-ej kolumny pomnożony przez $(-1)^{i+j}$

② <u>Macierzą transponowaną</u> do macierzy A nazywamy macierz A^t zdefiniowaną przez $A^t_{ij} = A_{ji}$, $\forall\, i,j \in \{1,\dots,n\}$.

Zauważmy że definicja A^c nie potrzebuje żadnych warunków na macierz A.

Rozwinięcie Laplace'a: $\forall A \in M_n(K), i \in \{1, \dots, n\}$:

$\boxed{\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \tilde{A}_{ji}}$, gdzie $\tilde{A}_{ji}$ to dopełnienie algebraiczne (cofactor) A_{ji}.

Dowód: $\det(A) = \det(A_1, \dots, A_n)$

$$= \det\left(A_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} e_j A_{ji}, \dots, A_n\right) =$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \det(e_j, A_1, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n)$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \det(e_j, A_1 - e_j A_{j1}, \overset{\check{i}}{\dots}, A_n - e_j A_{jn})$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} (-1)^{j-1} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{\check{j}\check{i}} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ji} \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A_{\check{j}\check{i}} \end{pmatrix}_{k\sigma(k)} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ji} (-1)^{i+j} \sum_{\chi \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}(\chi) \prod_{k=1}^{n-1} (A_{\check{j}\check{i}})_{k\chi(k)} = \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \tilde{A}_{ji}$$

■

<u>Wniosek</u> (rozwinięcie Laplace'a względem wiersza): $\det(A) = \det(A^t) = \sum_{j=1}^{k} A^t_{ji} (-1)^{j+i} \det(A^t_{\hat{j}\hat{i}})$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (-1)^{i+j} \det((A_{\hat{i}\hat{j}})^t) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{\hat{i}\hat{j}})$$

$$= \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \tilde{A}_{ij}.$$

<u>Twierdzenie</u>: $\exists \det(A)^{-1} \Rightarrow \boxed{A^{-1} := \frac{\tilde{A}^t}{\det(A)}}$

<u>Dowód</u>: Z dowodu rozwinięcia Laplace'a mamy $\tilde{A}_{ki} = \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, e_k, A_{i+1}, \ldots, A_n)$.

Podstawiając ten wzór otrzymujemy

$$(A^{-1}A)_{ij} = \det(A)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}^t_{ik} A_{kj} = \det(A)^{-1} \sum_{k=1}^{n} \tilde{A}_{ki} A_{kj}$$

$$= \det(A)^{-1} \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} e_k A_{kj}, A_{i+1}, \ldots A_n)$$

$$= \det(A)^{-1} \det(A_1, \ldots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \ldots, A_n)$$

$= \delta_{ij}$. Zatem $A^{-1}A = I$. Ponieważ $\det(A^t) = \det(A)$, mamy też $(A^t)^{-1}A^t = I$.

Stąd $A((A^t)^{-1})^t = I$. Wreszcie

$$A^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}A((A^t)^{-1})^t = ((A^t)^{-1})^t. \quad \blacksquare$$

Przykład: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Zaiste,

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{array}{c|c} da-bc & db-bd \\ \hline -ca+ac & -cb+ad \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ oraz } \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{ad-bc}\left(\begin{array}{c|c} ad-bc & -ab+ba \\ \hline cd-dc & -cb+da \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uwaga: Wyznacznik jest homomorfizmem z grupy $\mathrm{Aut}(V)$ w grupę wszystkich odwracalnych elementów pierścienia k. Jeśli k jest ciałem, oznacza to grupę $k \setminus \{0\}$.

Przykład: Odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \xmapsto{i} \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, z & \mathrm{Im}\, z \\ -\mathrm{Im}\, z & \mathrm{Re}\, z \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ jest homomorfizmem pierścieni takim że $\forall z \in \mathbb{C} : |z| = \sqrt{\det(i(z))}$. Podpierścień $\mathbb{H} := \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \,\middle|\, z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$ jest nieprzemiennym ciałem kwaternionów. Tu też $|h| = \sqrt{\det(h)}$ $\forall h \in \mathbb{H}$.

Teraz naszym celem jest detekcja dalszych własności endomorfizmów przy pomocy wyznaczników.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $\dim_k V < \infty$ i $f \in End(V)$.
Jeśli f jest surjekcją, to jest bijekcją.

<u>Dowód</u>: Z surjektywności f i wolności V wynika istnienie $\tilde{f} \in End(V)$ takiego że $f \circ \tilde{f} = id$. Stąd $\det(f)\det(\tilde{f}) = 1$.
Pamiętając o izomorfizmie pierścieni $End(V) \cong M_{\dim_k V}(k)$, z poprzedniego twierdzenia wnioskujemy że f jest bijekcją.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $\dim_k V = n < \infty$ i $f \in End(V)$.
$\operatorname{Ker} f = 0 \iff \det(f)$ <u>nie</u> jest dzielnikiem zera ani zerem $(\lambda \det(f) = 0 \Rightarrow \lambda = 0)$.

<u>Dowód</u>: $\operatorname{Ker} f = 0 \iff f(B)$ jest zbiorem liniowo niezależnym, gdzie B jest bazą V.
Zaiste, $f\left(\sum_{b \in B} \alpha_b b\right) = \sum_{b \in B} \alpha_b f(b)$ daje tę równoważność.

Liniowa niezależność $f(B)$ jest z kolei równoważna liniowej niezależności kolumn macierzy $M_{BB}(f)$. Doprawdy, wynika to z równania $f(c) = \sum_{b \in B} b F_{bc}$ na współczynniki macierzy $M_{BB}(f) =: F$ i izomorfizmu $V \cong k^n$ zadanego przez bazę B. Jeśli kolumny F są liniowo zależne, to $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ i $\lambda_i \neq 0$: $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j F_j = 0$. Wtedy

$$0 = \det\left(F_1, \dots, F_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j F_j, F_{i+1}, \dots, F_n\right)$$

$= \lambda_i \det(F)$, czyli $\det(F)$ jest dzielnikiem zera lub zerem. Odwrotna implikacja jest trudniejsza, ale można ją udowodnić przez indukcję. ■

<u>Przykład</u>: Macierz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rozpatrywana nad:

① $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ma niezerowe jądro $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

② $\mathbb{Z}$ ma zerowe jądro $\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m-n \\ m+n \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow m = n = 0\right)$, ale nie jest odwracalna bo $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ nie jest odwracalny w $\mathbb{Z}$ i

③ $\mathbb{Q}$ jest odwracalna bo $\left(\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.