ROZWIĄZYWANIE UKŁADÓW RÓWNAŃ LINIOWYCH

Niech k będzie niezerowym pierścieniem przemiennym. Rozwiązanie układu m-równań liniowych z n-niewiadomymi

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ A_{m1}x_1 + \dots + A_{mn}x_n = y_m, \end{cases}$$

gdzie wszystkie elementy równań należą do k, równoważne jest rozwiązaniu równania

$$\boxed{k^n \xrightarrow{a} k^m, \quad a(x) = y},$$

gdzie

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

a jest odwzorowaniem liniowym którego elementy macierzowe w bazach kanonicznych to A_{ij}, $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Przypomnijmy że dla dowolnego odwzorowania liniowego f pomiędzy dowolnymi

Wolnymi ... prawymi R-modułami o bazach odpowiednio B i C, <u>elementy macierzowe f względem B i C</u> są zdefiniowane przez równania:

$$\boxed{f(b) =: \sum_{c \in C} c F_{cb}, \quad b \in B}.$$

Elementy macierzowe definiują <u>macierz odwzorowania liniowego względem baz B i C</u>:

$$\boxed{C \times B \ni (c, b) \xmapsto{F} F_{cb} \in R}.$$

Z drugiej strony, ponieważ do definicji odwzorowania liniowego z modułu wol- nego potrzeba i wystarcza zadać je na wszystkich elementach jakiejś jego bazy, każde odwzorowanie $C \times B \xrightarrow{G} R$ o włas- ności $\forall b \in B \; \exists$ skończony $I_b \subseteq C : G_{cb} \neq 0 \Leftrightarrow c \in I_b$ zadaje odwzorowanie liniowe $M \xrightarrow{g} N$ wzorami $g(b) := \sum_{c \in C} c G_{cb}$, $b \in B$. Przyporządko- wania $f \mapsto F$ i $G \mapsto g$ (w tych samych bazach) są do siebie wzajemnie odwrotne.

Rozważając równanie liniowe $a(x) = y$ chcemy odpowiedzieć na 2 podstawowe pytania:

① Czy $\exists x \in k^n : a(x) = y$?

② Czy $\exists! x \in k^n : a(x) = y$?

Pozytywna odpowiedź na ① $\forall y \in k^m$ jest równoważna surjektywności a. Pozytywna odpowiedź na ② dla chociażby jednego $y_0 \in k^m$ jest równoważna injektywności a: $\exists! x_0 \in k^n : a(x_0) = y_0$ i $a(x) = a(x') \Rightarrow a(x_0) = y_0 + a(x) - a(x')$

$\Leftrightarrow a(x_0 + x' - x) = y_0 \Rightarrow x_0 + x' - x = x_0 \Leftrightarrow$ $x = x'$. (Injektywność a trywialnie implikuje jedyność, choć nie istnienie, rozwiązania równania $a(x) = y$.)

Załóżmy że $m = n$ oraz że $A = (A_1, \ldots, A_n)$ jest macierzą odwzorowania liniowego a. Wtedy $\det(A_1, \ldots, A_{i-1}, y, A_{i+1}, \ldots, A_n) =$

$$\det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} A_j x_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \det\left(A_1, \dots, A_{i-1}, A_j, A_{i+1}, \dots, A_n\right)$$

$= x_i \det(A)$. Udowodniliśmy w ten sposób wzory Cramera:

$$\boxed{\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_i \det(A) = \det(A_1, \dots, \overset{i}{\overset{\downarrow}{Y}}, \dots, A_n)}$$

Z drugiej strony, jeśli założymy prawdziwość wzorów Cramera, to

$$x_i \det(A) = \sum_{j=1}^{n} \det(A_1, \dots, \overset{i}{\overset{\downarrow}{e_j}}, \dots, A_n) Y_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \hat{A}_{ji} Y_j = \sum_{j=1}^{n} \hat{A}^t_{ij} Y_j \text{, czyli}$$

$\det(A)x = \hat{A}^t Y$. Mnożąc obustronnie przez A dostajemy $\det(A)Ax = A\hat{A}^t Y \iff \det(A)(Ax - Y) = 0$. Pokazaliśmy więc:

__Twierdzenie__: Jeśli $\det(A)$ __nie__ jest zerem ani dzielnikiem zera, to wzory Cramer'a są __równoważne__ układowi równań liniowych

$$\begin{cases} A_{11}x_1 + \dots + A_{1n}x_n = Y_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ A_{n1}x_1 + \dots + A_{nn}x_n = Y_n. \end{cases}$$

__Wniosek__: Jeśli a jest surjekcją, to

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad x_i = \det(A)^{-1} \det(A_1, \dots, \overset{i}{\overset{\vee}{Y}}, \dots, A_n).$$

__Dowód__: Surjektywność a implikuje odwracalność wyznacznika. ■

Załóżmy teraz że k jest ciałem, ale porzućmy założenie $m=n$. Teraz możemy zdefiniować "miarę surjektywności" odwzorowania liniowego $k^n \xrightarrow{a} k^m$.

__Rzędem__ odwzorowania liniowego a nazywamy wymiar obrazu a:

$$\boxed{\mathrm{rank}(a) := \dim(\mathrm{Im}\, a)}.$$

Zatem a jest surjekcją $\iff$ $\operatorname{rank}(a) = m$.

Doprawdy, $\dim(\operatorname{Im} a) = m \iff \exists$ m-elementowa baza $\operatorname{Im} a$. Taka baza jest zbiorem liniowo niezależnym w k^m. Jeśli nie byłaby bazą k^m, to dałoby się ją uzupełnić do bazy k^m. Ale wtedy baza k^m miałaby więcej niż m elementów, co przeczy Lematowi Steinitz'a. Dlatego baza $\operatorname{Im} a$ musi być bazą k^m, skąd $\operatorname{Im} a = k^m$.

<u>Twierdzenie (Kronecker-Capelli)</u>: Równanie $a(x) = Y$ ma rozwiązanie $\iff$

$$\operatorname{rank} a = \dim(\operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n, Y\})$$

<u>Dowód</u>: Po pierwsze, $\operatorname{rank} a = \dim(\operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n\})$, co udowadnia "$\Rightarrow$". Odwrotnie, argumentując Lematem Steinitz'a, otrzymujemy

$$\dim(\operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n\}) = \dim(\operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n, Y\})$$

$$\Rightarrow \operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n\} = \operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n, Y\}$$

$$\Rightarrow Y \in \operatorname{span}\{A_1, \dots, A_n\} = \operatorname{Im}(a). \blacksquare$$

<u>Rzędem skończonej macierzy $M = (M_1, \dots, M_n)$</u> nazywamy $\dim(\operatorname{span}\{M_1, \dots, M_n\})$.