

# SPEKTRUM I WARTOŚCI WŁASNE

Algebra z jedynką nad przemennym pierścieniem

(algebra) nazywamy pierścień  $A$  wraz ze strukturą modułu nad  $k$  taką że

$$\forall \alpha, \beta \in k, r, s \in A: \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{(\alpha \cdot r)} \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{(\beta \cdot s)} = \underset{\substack{\uparrow \\ k}}{(\alpha \beta)} \underset{\substack{\uparrow \\ A}}{(rs)}$$

(biliniowość mnożenia w  $A$  nad  $k$ ).

Przykłady: ①  $A := \text{Map}(X, k)$  z działaniami

punktowymi. ②  $A := \text{End}_k(M)$  gdzie  
 $(\alpha F)(m) := \alpha F(m)$ . Zauważmy że

$$\begin{aligned} ((\alpha F) \circ (\beta G))(m) &= (\alpha F)(\beta G(m)) = \beta \alpha F(G(m)) \\ &= ((\alpha \beta)(F \circ G))(m). \end{aligned}$$

Niech  $A$  będzie algebra z jedynką nad  $k$ .

Spektrum elementu  $a$  w  $A$  nazywamy

$$\text{spec}_A(a) := \{\lambda \in k \mid \nexists (a - \lambda \cdot 1)^{-1} \in A\}$$

Przykład: Niech  $k$  będzie ciałem. Wtedy  
 $\text{spec}(f) = \text{Im } f$ . Zauważ,  $\lambda \in \text{Im } f$   
 $\text{Map}(X, k)$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in X : f(x_0) = \lambda \Leftrightarrow \exists x_0 \in X : (f - \lambda \cdot 1)(x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \nexists (f - \lambda \cdot 1)^{-1} \in \text{Map}(X, k) \Leftrightarrow \lambda \in \text{spec}(f).$$

$\text{Map}(X, k)$

Twierdzenie: Niech  $A$  będzie algebrą z jednostką nad  $\mathbb{C}$ , a  $p := \alpha_n x^n + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{C}[X]$ . Wtedy  $\text{spec}_A(a) \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \text{spec}_A(p_A(a)) = p_{\mathbb{C}}(\text{spec}_A(a)), \text{ gdzie}$$

$$p_A(a) := \alpha_n a^n + \dots + \alpha_0 \in A, p_{\mathbb{C}}(\lambda) := \alpha_n \lambda^n + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{C}.$$

Dowód: Dla  $n=0$  równość jest oczywista.

Załóżmy więc  $n > 0$  i z Zasadniczego Twierdzenia Algebry rozłożymy funkcję wielomianową

$$p_{\mathbb{C}}(z) - \lambda = \lambda_0 (z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_n),$$

$$\lambda_0 \neq 0. \text{ Stąd } p_A(a) - \lambda \cdot 1 = \lambda_0 (a - \lambda_1 \cdot 1) \dots (a - \lambda_n \cdot 1).$$

$$\text{Jeśli } \forall k \in \{1, \dots, n\} \exists (a - \lambda_k \cdot 1)^{-1} \Rightarrow \exists (p_A(a) - \lambda \cdot 1)^{-1}.$$

$$\text{Zatem } \lambda \in \text{spec}_A(p_A(a)) \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\} : \lambda_k \in \text{spec}_A(a).$$

$$\Rightarrow \lambda = p_{\mathbb{C}}(\lambda_k) \in p_{\mathbb{C}}(\text{spec}_A(a)). \text{ Odwrótnie, } 198$$

jeśli  $\exists (p_A(a) - \lambda \cdot 1)^{-1}$  to  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$  :  
 $(a - \lambda_k \cdot 1)(a - \lambda_k \cdot 1) \overset{k}{\vdots} (a - \lambda_k \cdot 1)(p_A(a) - \lambda \cdot 1)^{-1} = 1$   
 $= (p_A(a) - \lambda \cdot 1)^{-1}(a - \lambda_k \cdot 1) \overset{k}{\vdots} (a - \lambda_k \cdot 1)(a - \lambda_k \cdot 1),$   
 czyli  $\exists (a - \lambda_k \cdot 1)^{-1}$ . Zatem  $\exists k \in \{1, \dots, n\}$  :

$\lambda_k \in \text{spec}_A(a) \Rightarrow \lambda \in \text{spec}_A(p_A(a))$ . Pamiętaj-  
 ając że  $\lambda \in P_C(\text{spec}_A(a)) \Leftrightarrow \exists z_0 \in \text{spec}_A(a) :$   
 $p(z_0) - \lambda = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\} : \lambda_k \in \text{spec}_A(a)$   
 otrzymujemy pożądaną implikację

$\lambda \in P_C(\text{spec}_A(a)) \Rightarrow \lambda \in \text{spec}_A(p_A(a)). \blacksquare$

Przejdźmy teraz do kwadratowego przypadku.

Niech  $A = \text{End}_K(M)$ , gdzie  $M$  jest  
 skończonymi wymiarowym wolnym modulem  
 nad niezerowym przemiennym pierścieniem  $K$ .

Wtedy  $\forall f \in \text{End}_K(M)$  :

$$\text{spec}_{\text{End}_K(M)}(f) = \{ \lambda \in K \mid \det(f - \lambda \cdot \text{id}) = 0 \}.$$

Elementy  $\text{spec}_{\text{End}_K(M)}(f)$  nazywamy wartościami własnymi  
 endomorfizmu  $f$ . Funkcję wielomianową



$k \ni \lambda \xrightarrow{P_k^f} \det(f - \lambda \cdot \text{id}) \in k$  nazywamy  
(Niech  $\dim M = n$ .) wielomianem charakterystycznym F.V.Z. definicji

wyznacznika umiastujemy że  $P_k^f(\lambda) :=$

$$\det(f - \lambda \cdot \text{id}) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(f) \lambda^{n-1} + \dots + \det(f)$$

Istotnie, biorąc wyznacznik macierzy Fendo-  
morfizmu względem dowolnej bazy otrzymujemy  
z permutacji identycznościowej człon

$$(F_{11} - \lambda) \dots (F_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(F) \lambda^{n-1} +$$

+ wyrazy niższego rzędu. Wszystkie  
pozostałe permutacje mogą dać potęgę  $\lambda$   
co najwyżej  $n-2$ , więc nie zmienią  
współczynników przy  $\lambda^n$  i  $\lambda^{n-1}$ . Wreszcie  
uprzedź uodny otrzymujemy przez podstawienie  
 $\lambda = 0$ .

(Niech  $k$  będzie nieskończonym pierścieniem całkowitym.)  
Twierdzenie (Cayley-Hamilton):

Wtedy  $\boxed{\forall f \in \text{End}_k(M) : P_{\text{End}_k(M)}^f(f) = 0}$ , gdzie

$$P_{\text{End}_k(M)}^f(f) = (-1)^n f^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(f) f^{n-1} + \dots + \det(f).$$

Dowód: Przypominamy że  $(F - \lambda I)(F - \lambda I)^t =$   
 $= \det(F - \lambda I) I = p_k^t(\lambda) I$ . Niech  
 $(F - \lambda I)^t =: \sum_{m=0}^N \lambda^m Q_m, \forall m \in \{0, \dots, N\}: Q_m \in M_n(k)$

Mamy wtedy  $(F - \lambda I) \sum_{m=0}^N \lambda^m Q_m = p_k^t(\lambda) I$ .

Jest to  $k^2$  równań na funkcję wielomianową z  $k$  do  $k$ . Ponieważ  $k$  jest nieskończonym pierścieniem całkowitym, możemy funkcję wielomianową utożsamiać z wielomianami, stąd wynika linowa niezależność funkcji monomialowych  $\lambda \mapsto \lambda^l, l \in \mathbb{N}$ . Zatem we wszystkich  $k^2$  równaniach mamy równość współczynników przy wszystkich  $\lambda^l$ , czyli równość współczynników macierzowych przy wszystkich  $\lambda^l$ . Tak więc równanie pozostanie prawdziwe jeśli każde  $\lambda^l$  zamienimy na  $F^l$ .

Teraz  $(F - \lambda I) \sum_{m=0}^N \lambda^m Q_m = FQ_0 + \sum_{m=1}^N \lambda^m (FQ_m - Q_{m-1}) - \lambda^{N+1} Q_N$

implikuje  $P_{M_k(n)}^f(F) = FQ_0 - FQ_0 + F^2Q_1 - F^2Q_1 + \dots + F^{N+1}Q_N - F^{N+1}Q_N = 0$ . Pozostaje jeszcze zauważyć że izomorfizm pierścieni  $\text{End}_k(M) \cong M_n(k)$  jest w istocie izomorfizmem algebr:  $(\alpha f)(b) = \alpha f(b)$

$$= \alpha \left( \sum_{c \in C} F_{cb} c \right) = \sum_{c \in C} (\alpha F_{cb}) c. \quad \blacksquare$$

Przykład: Niech  $F := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ .

$$\text{Wtedy } P_F^f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda)$$

$$-bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \text{tr}(F)\lambda + \det(F).$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+dd^2 \end{array} \right)$$

$$(a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} a^2+da & ab+db \\ aca+dc & ad+dd^2 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{cc|cc} bc-da & 0 \\ 0 & cb-da \end{array} \right) = -\det(F)I$$

Kontraprzykład: Niech  $F := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

$$\text{Wtedy } \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = \lambda - 1, \text{ ale}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$