WEKTORY I PODPRZESTRZENIE WŁASNE

Niech M będzie skończenie wymiarowym wolnym modułem nad niezerowym przemiennym pierścieniem k. Niech $f \in End_k(M)$ oraz $\lambda \in spec_{End_k(M)}(f)$. Wtedy $\det(f - \lambda\, id) = 0$

$\Rightarrow Ker(f - \lambda\, id) \neq 0 \Leftrightarrow \exists v \in M \setminus \{0\}$:

$$\boxed{f(v) = \lambda v}.$$

Wektorami własnymi endomorfizmu f dla wartości własnej λ nazywamy wszystkie $v \in M$ spełniające $f(v) = \lambda v$. Dla każdej wartości własnej istnieje niezerowy wektor własny.

Uwaga: Nawet jeśli $k = \mathbb{C}$, to przy $\dim M = \infty$ możemy mieć $\lambda \in spec_A(f)$, gdzie $A \subseteq End(M)$, takie że $f(v) = \lambda v \Rightarrow v = 0$. Ogólnie tylko te elementy spektrum które mają niezerowe wektory

własne nazywamy wartościami własnymi.
Dla $\dim M < \infty$ każdy element spektrum jest w tym sensie wartością własną.
Załóżmy że k jest pierścieniem całkowitym.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $\{\lambda_i\}_1^m$ będzie zbiorem różnych wartości własnych $f \in \mathrm{End}_k(M)$, $\dim M < \infty$. Niech $v_i \in \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id}) \setminus \{0\}$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Wtedy zbiór $\{v_i\}_1^n$ jest liniowo niezależny.

<u>Dowód</u>: Przypuśćmy że zbiór $\{v_i\}_1^m$ jest liniowo zależny. Wtedy istnieje niezerowe rozwiązanie równania $\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = 0$, tzn. $\exists j \in \{1, \dots, n\}: \alpha_j \neq 0$. Przykładając do równania $\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i = 0$ endomorfizm $\prod_{\substack{i=1 \\ k \neq j}}^m (f - \lambda_i \mathrm{id})$ otrzymujemy $\underbrace{\alpha_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m (\lambda_j - \lambda_i)}_{\neq 0} v_j = 0$.

Utożsamiając M z $k^{\dim M}$ a v_j z kolumienką elementów z k, z braku dzielników zera wnioskujemy że jest to kolumienka zerowa. Przeczy to założeniu $v_j \neq 0$ i kończy dowód. ∎

<u>Podprzestrzenią własną</u> endomorfizmu f dla wartości własnej $\lambda \in \operatorname{spec}_{\operatorname{End}_k(M)}(f)$

nazywamy $\boxed{V_\lambda := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \ker(f - \lambda\, id)^n}$.

Z faktu że $\ker(f-\lambda\, id)^n \subseteq \ker(f-\lambda\, id)^{n+1}$ wynika natychmiast że V_λ jest podmodułem M. Wiemy też że $V_\lambda \neq 0$ bo $\ker(f-\lambda\, id) \neq 0$. Jest oczywiste że $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ bo $f \circ (f-\lambda\, id)^n = (f-\lambda\, id)^n \circ f$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

<u>Twierdzenie</u>: Niech k będzie pierścieniem całkowitym. Niech V_{λ_i}, $i \in \{1, \dots, n\}$, będzie rodziną podprzestrzeni własnych dla różnych wartości własnych. Wtedy dowolny zbiór $\{v_i\}_1^n$, gdzie $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$, jest liniowo niezależny.

Dowód: $\exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall i \in \{1, \dots, m\}$: $(f - \lambda_i id)^n v_i = 0$. Zauważmy że $k \neq i$ $\Rightarrow (f - \lambda_k id) v_i \neq 0$. Zaiste, $(f - \lambda_k id) v_i = (f - \lambda_i id) v_i + (\lambda_i - \lambda_k) v_i$, więc

$$(f - \lambda_k id) v_i = 0 \Leftrightarrow (f - \lambda_i id) v_i = (\lambda_k - \lambda_i) v_i$$

$$\Rightarrow (f - \lambda_i v_i)^n v_i = (\lambda_k - \lambda_i)^n v_i \neq 0$$

z braku dzielników zera. Dostajemy sprzeczność, więc $(f - \lambda_k id) v_i \neq 0$.

Wnioskujemy dalej że $(f - \lambda_k id) v_i \in V_{\lambda_i}$ bo $(f - \lambda_i id)^n (f - \lambda_k id) v_i = (f - \lambda_k id)(f - \lambda_i id)^n v_i = 0$. Zatem możemy iterować powyższe rozumowanie otrzymując $(f - \lambda_k id)^n v_i \neq 0$. Reszta dowodu przebiega jak w poprzednim twierdzeniu przy zastosowaniu $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (f - \lambda_i id)^n$ do $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i = 0$.

Wniosek: $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m} = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$

Wniosek: $\lambda \neq \lambda' \Rightarrow V_\lambda \cap V_{\lambda'} = 0$

Załóżmy teraz $k = \mathbb{C}$. Wtedy

$$\det(f - \lambda\, id) = (-1)^{\dim M} (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \ldots (\lambda - \lambda_m)^{k_m}$$

dzięki algebraicznej domkniętości $\mathbb{C}$.

Z cielesności $\mathbb{C}$ możemy wybrać bazę M tak że $\{e_1, \ldots, e_{n_1}\}$ jest bazą $V_{\lambda_1}, \ldots,$ $\{e_{\sum_{i=1}^{m-1} n_i + 1}, \ldots, e_{\sum_{i=1}^{m} n_i}\}$ jest bazą V_{λ_m}. W takiej bazie, dzięki własności $\forall i \in \{1, \ldots, m\}.$ $f(V_{\lambda_i}) \subseteq V_{\lambda_i}$ (niezmienniczość podprzestrzeni własnych), macierz endomorfizmu f ma postać blokową:

$$F := \begin{pmatrix} F_1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & F_m & \\ & \tilde{G} & & G \end{pmatrix}.$$

Dlatego $\det(f - \lambda\, id) = \det(F_1 - \lambda I_{n_1}) \ldots \det(F_m - \lambda I_{n_m}) \det(G - \lambda\, id)$.

Zauważmy że G jest puste $\iff M = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$. Jeśli G jest niepuste, to $\det(G - \lambda I)$ jest podzielne przez $(\lambda - \lambda_j)$ dla jakiegoś $j \in \{1, \dots, m\}$.

Ale wtedy $\exists v \in \operatorname{span}\{e_{\sum_{i=1}^{m} n_i + 1}, \dots, e_{\dim M}\} \setminus \{0\}$: $f(v) = \lambda_j v$, skąd $v \in V_{\lambda_j} \setminus \{0\}$, co przeczy liniowej niezależności elementów bazy. Dlatego G jest puste. Z drugiej strony, $\forall i \in \{1, \dots, m\}: (F_i - \lambda_i I_{n_i})^{n} = 0$ bo $(f - \lambda_i \, id)^{n}|_{V_{\lambda_i}} = 0$.

Zatem wartości własne tych macierzy są zerami. Istotnie, $\exists v \neq 0: Av = \lambda v \Rightarrow 0 = A^n v = \lambda^n v \Rightarrow \lambda = 0$. Stąd $\det(F - \lambda_i I_{n_i} - \lambda I_{n_i}) = (-1)^{n_i} \lambda^{n_i}$ dzięki algebraicznej domkniętości $\mathbb{C}$. Teraz możemy wywnioskować że $\det(F_i - \lambda I_{n_i}) = \det(F - \lambda_i I_{n_i} - (\lambda - \lambda_i) I_{n_i}) = (-1)^{n_i} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$.

Udowodniliśmy w ten sposób:

Twierdzenie: $\forall f \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(M)$, $\dim M < \infty$: $\det(f - \lambda \, id) = (-1)^{\dim M} (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$, $M = \bigoplus_{i=1}^{m} V_{\lambda_i}$, $\dim V_{\lambda_i} = n_i$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$.