

WIELOMIANY I SZEREGI POTĘGOWE ENDOMORFIZMÓW

Niech A będzie algebrą z jednostką nad niezerowym przemiennym pierścieniem k i niech $k[N]$ będzie algebrą wielomianów nad k . $\forall a \in A$ $\exists$ homomorfizm enkadygujący

$$k[N] \ni \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{skonieczne}}} \alpha_n X^n \xrightarrow{ev_a} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{skonieczna}}} \alpha_n a^n \in A.$$

W szczególnym przypadku $A = \text{End}_C(V)$, $\dim V =: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, możemy zrobić dużo więcej. Głównie:

1) homomorfizm algebr $\text{End}_C(V) \cong M_n(C)$.

2) homomorfizm przestrzeni wektorowych

$M_n(C) \cong C^{n^2}$ dający nam pojęcie zbier-
ności ciągu macierzy:

$$A_k \rightarrow A \Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\}: (A_k)_{ij} \rightarrow A_{ij}.$$

5) $\forall f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \exists$ baza V taka że macierz F endomorfizmu f jest w tej bazie postaci blokowej

$$F = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 I_{n_1} + (F_1 - \lambda_1 I_{n_1})}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \underbrace{\lambda_m I_{n_m} + (F_m - \lambda_m I_{n_m})}_{n_m} \end{pmatrix},$$

gdzie $\forall i \in \{1, \dots, m\}: \lambda_i \in \text{spec}_{\text{End}(V)}(f), n_i := \dim V_{\lambda_i}$.

Pamiętając że macierze $F_i - \lambda_i I_{n_i}, i \in \{1, \dots, m\}$ są nilpotentne (bo $\dim V_{\lambda_i} < \infty$ i można wybrać największą potęgę anihilującą wszystkie elementy bazy) wnioskujemy

Twierdzenie: Jeśli $\varphi(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$ jest zespolonym szeregiem potęgowym o promieniu

zbieżności R oraz $\forall \lambda \in \text{spec}_{\text{End}(V)}(f): |\lambda| < R$, to $\exists \varphi(f) := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N a_j f^j$ oraz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: macierz $\varphi(f)$ w bazie rozkładu na podprzestrzenie własne f to:

$$\begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1) I_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi(\lambda_m) I_{n_m} \end{pmatrix} + \dots + \frac{1}{n_0!} \begin{pmatrix} \varphi^{(n_0)}(\lambda_1) (F_1 - \lambda_1 I_{n_1})^{n_0} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi^{(n_0)}(\lambda_m) (F_m - \lambda_m I_{n_m})^{n_0} \end{pmatrix}.$$

Dowód: Zbiorność na $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ indukujemy ze zbiorności w $M_n(\mathbb{C})$ przez zadanie izomorfizmu algebr zadane przez dowolną bazę homeomorfizmem. Każda baza V zadaje taką samą zbiorność na $\text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ bo złożenie $M_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{M_B^{-1}} \text{End}_{\mathbb{C}}(V) \xrightarrow{M_C} M_n(\mathbb{C})$ jest postaci $L \mapsto PLP^{-1}$, co jest homeomorfizmem z $M_n(\mathbb{C})$ w $M_n(\mathbb{C})$. Weźmy bazę V dającą rozkład $V = \bigoplus_{i=1}^m V_{\lambda_i}$ na podprzestrzenie własne endomorfizmu f . Pokazanie istnienia $\varphi(f)$ i jego bliznienie sprowadza się do pokazania istnienia i bliznienia stopnia macierzowego $\varphi(F)$, gdzie F jest blokowo-diagonalną macierzą endomorfizmu f w wybranej wyżej bazie. Ze względu na blokową diagonalność F , wystarczy ze nasze rozumowania ograniczyć do jednego dowolnego bloku $F_i = \lambda_i I_{n_i} + (F_i - \lambda_i I_{n_i})$. Dzięki zaś nilpotentności $(F_i - \lambda_i I_{n_i})$, $\exists m_i \in \mathbb{N} \forall N > m_i : F_i^N = \lambda_i^N I_{n_i} + \dots + \binom{N}{m_i} \lambda_i^{N-m_i} (F_i - \lambda_i I_{n_i})^{m_i}$

$$= \lambda_i^N I_{n_i} + \dots + \frac{N(N-1)(N-m_i+1) \lambda_i^{N-m_i}}{m_i!} (F_i - \lambda_i I_{n_i})^{m_i}$$

$$= \lambda_i^N I_{n_i} + \dots + \frac{1}{m_i!} (\lambda_i^N)^{(m_i)} (F_i - \lambda_i I_{n_i})^{m_i}$$

Dla $N \leq m_i$ wzór pozostaje prawdziwy tylko kiedy się na N -tym wyrazie.
 Ze względu na liniowość różniczkowania otrzymujemy $\forall p \in \mathbb{C}[N] : p(F_i) =$

$$= p(\lambda_i) I_{n_i} + \dots + \frac{1}{m_i!} p^{(m_i)}(\lambda_i) (F_i - \lambda_i I_{n_i})^{m_i}$$

Następnie, korzystając z tego że szeregi potęgowe możemy różniczkować wyraz po wyrazie, dostajemy $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^N a_j (F_i)^j =:$

$$=: \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi_N(F_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\varphi_N(\lambda_i) I_{n_i} + \frac{1}{m_i!} \varphi_N^{(m_i)}(\lambda_i) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (F_i - \lambda_i I_{n_i})^{m_i} \right) = \varphi(\lambda_i) I_{n_i} + \frac{\varphi^{(m_i)}(\lambda_i)}{m_i!} \cdot (F_i - \lambda_i I_{n_i})^{m_i}$$

$$\cdot (F_i - \lambda_i I_{n_i})^{m_i} \quad \text{Zatem dla}$$

$n_0 := \max \{m_i\},$ umieszczamy też twierdzenia.

Endomorfizm f nazywamy diagonalizowalnym

$\Leftrightarrow \exists$ baza w której jego macierz jest diagonalna. Jeśli $f \in \text{End}_K(V)$ ma n różnych wartości własnych, to f jest diagonalizowalny bo $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$\dim V_{\lambda_i} = 1$. (Z istnienia niezerowego wektora własnego mamy też $V_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i \text{id})$.)

Alte jeśli $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ jest macierzą endomorfizmu f , to jest on diagonalizowalny chociaż $\det(f - \lambda \text{id}) = -\lambda(\lambda - 1)^2$. Ogólnie mamy:

Spstrzezenie: Niech M będzie skończonym wymiarowym wolnym modulem nad niezerowym przemiennym pierścieniem K . Endomorfizm $f \in \text{End}_K(M)$ jest diagonalizowalny $\Leftrightarrow \exists$ baza M złożona z wektorów własnych f .

Spstrzezenie: Niech M będzie skończonym wymiarowym wolnym modulem nad nie-

rownym pierwiastkiem całkowitym k . Nilpotentny endomorfizm $f \in \text{End}_k(M)$ jest diagonalizowalny $(\Rightarrow) f = 0$.

Przykład: Niech $P \in M_n(\mathbb{C})$ będzie ma-

ciętą idempotentną, tzn. $P^2 = P$. Wtedy

$$e^{2\pi i P} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(2\pi i P)^n}{n!} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(I_n + P \sum_{n=1}^N \frac{(2\pi i)^n}{n!} \right)$$

$$= I_n + P \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N \frac{(2\pi i)^n}{n!} - 1 \right) = I_n + P(e^{2\pi i} - 1)$$

$$= I_n.$$

Przykład: $F := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. $\det(F - \lambda I_2)$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - \lambda_+)(\lambda - \lambda_-), \text{ gdzie}$$

$$\lambda_+ := \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_- := \frac{1 - \sqrt{5}}{2}. \text{ Odpowiednie}$$

wektory własne to $v_{\pm} := \begin{pmatrix} \lambda_{\pm} \\ 1 \end{pmatrix}$. Mamy

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_+}{\sqrt{5}} v_+ - \frac{\lambda_-}{\sqrt{5}} v_- . \text{ Zatem } F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{\lambda_+^{n+1}}{\sqrt{5}} v_+ - \frac{\lambda_-^{n+1}}{\sqrt{5}} v_- = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_+^{n+2} - \lambda_-^{n+2} \\ \lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1} \end{pmatrix}$$

Daje to wzór na ciąg Fibonacciego zdefiniowany rekurencyjnie $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_0 = 1 = x_1$, bo $F^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = F^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$.