ODWZOROWANIA TRANSPONOWANE

Niech M będzie (prawym) modułem nad łącznym pierścieniem R. Modułem dualnym do modułu M nazywamy lewy moduł wszystkich funkcjonałów liniowych

$$M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R) := \left\{ \varphi \in \mathrm{Map}(M, R) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall m, m' \in M, r \in R: \\ \varphi(m+m') = \varphi(m) + \varphi(m'), \\ \varphi(mr) = \varphi(m) r. \end{array} \right\}$$

Dodawanie i mnożenie przez skalar są punktowe:

$$\forall m \in M: \quad (\varphi + \varphi')(m) = \varphi(m) + \varphi'(m)$$

$$\forall m \in M, r \in R: \quad (r\varphi)(m) = r\varphi(m)$$

Zauważmy że $r\varphi$ jest nadal prawo R-liniowe bo $(r\varphi)(mr') = r\varphi(mr') =$
$= r(\varphi(m)r') = (r\varphi(m))r' = (r\varphi)(m)r'$.

Jeśli $M \xrightarrow{f} N$ jest liniowym odwzorowaniem pomiędzy prawymi R-modułami, to odwzorowaniem transponowanym

(dualnym, sprzężonym, dołączonym) nazywamy

odwzorowanie liniowe pomiędzy lewymi

R - modułami dualnymi:

$$\boxed{N^* \ni \varphi \longmapsto f^T(\varphi) := \varphi \circ f \in M^*}.$$

Odwzorowanie f^T jest dobrze zdefiniowane bo złożenie odwzorowań liniowych jest liniowe. Jest ono lewo R-liniowe

bo $\left(f^T(r\varphi)\right)(m) = (r\varphi)(f(m)) = r\varphi(f(m))$

$= r\left(f^T(\varphi)(m)\right) = \left(r f^T(\varphi)\right)(m)$. (Dodawanie sprawdza się podobnie.)

Oczywiście, moduły dualne do lewych modułów są modułami prawymi. Zatem M^{**} jest prawym R-modułem. Istnieje naturalna R-liniowa ewaluacja

$$M \ni m \longmapsto ev_m \in M^{**}, \quad ev_m(\varphi) := \varphi(m).$$

Zaiste, ev_m jest lewo R-liniowe bo
$$ev_m(r\varphi) = (r\varphi)(m) = r\varphi(m) = r(ev_m(\varphi)).$$
(Dodawanie sprawdza się podobnie.)

Zaś przyporządkowanie $m \xmapsto{ev} ev_m$ jest prawo R-liniowe bo $ev_{(mr)}(\varphi) = \varphi(mr)$
$= \varphi(m)r = ev_m(\varphi)\, r = (ev_m r)(\varphi)$. (Znowu dodawanie sprawdza się podobnie.)

Ewaluacja jest naturalna w następującym sensie. Jeśli $M \xrightarrow{f} N$ jest liniowym odwzorowaniem prawych R-modułów, to otrzymujemy przemienny diagram odwzorowań prawo R-liniowych:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "ev"] & N \arrow[d, "ev"] \\ M^{**} \arrow[r, "f^{TT}"] & N^{**} \end{tikzcd}.$$

(Korzystamy tu z faktu że odwzorowanie transponowane do odwzorowania lewo liniowego jest prawo liniowe.)

Istotnie, $(f^{TT}(ev_m))(\varphi) = ev_m(f^T(\varphi)) = (f^T(\varphi))(m)$
$= \varphi(f(m)) = ev_{f(m)}(\varphi)$

Przykład: $\left(\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^* = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$.

Twierdzenie: Jeśli M jest modułem wolnym, to ewaluacja $M \xrightarrow{ev} M^{**}$ jest injekcją.

Dowód: $ev_m = 0 \iff \forall \varphi \in M^*: 0 = ev_m(\varphi) = \varphi(m)$.

Niech B będzie bazą M. Wtedy $m = \sum_{b \in B} b r_b$, oraz $m \neq 0 \Rightarrow \exists b_0 \in B : r_{b_0} \neq 0$. Zdefiniujmy $\varphi_0 \in M^*$ przez $\varphi_0(b_0) = 1$ i $\forall b \in B \setminus \{b_0\}: \varphi_0(b) = 0$.

Wtedy $\varphi_0(m) = \varphi_0\left(\sum_{b \in B} b r_b\right) = \sum_{b \in B} \varphi_0(b) r_b =$

$= r_{b_0} \neq 0$. Przeczy to $\forall \varphi \in M^*: \varphi(m) = 0$.

Zatem $m = 0$, co implikuje że ev jest injekcją. ∎

Kontrprzykład: $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^* = 0$ bo $0 = \varphi(1+1) = \varphi(1) + \varphi(1) \Rightarrow \varphi(1) = 0$. Zatem $0 \neq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{ev} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{**} = 0$ nie może być injekcją. Udowadnia to że $\mathbb{Z}$-moduł $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nie ma bazy.

Załóżmy teraz że M i N są wolnymi prawymi R-modułami ze skończonymi bazami odpowiednio B i C. Bazą dualną do bazy $B := \{e_1, \ldots, e_m\}$ nazywamy zbiór

$B^* := \{e^i \in M^* \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$, gdzie

$$\forall i,j \in \{1, \ldots, m\} : \boxed{e^i(e_j) := \delta_{ij}} := \begin{cases} 1 & \text{dla } i=j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}.$$

Sprawdźmy że B^* jest bazą M^*.

(1) Liniowa niezależność: $\sum_{i=1}^{m} r_i e^i = 0 \iff$

$\forall j \in \{1, \ldots, m\} : \left(\sum_{i=1}^{m} r_i e^i\right)(e_j) = 0 \iff$

$\forall j \in \{1, \ldots, m\} : r_j = 0$.

(2) Rozpinanie: $\forall \varphi \in M^* : \varphi = \sum_{i=1}^{m} \varphi(e_i) e^i$.

Istotnie, $\forall j \in \{1, \ldots, m\} : \left(\sum_{i=1}^{m} \varphi(e_i) e^i\right)(e_j) = \varphi(e_j)$.

Wniosek: Jeśli M jest modułem wolnym ze skończoną bazą, to $ev : M \longrightarrow M^{**}$ jest izomorfizmem. Dowód: Jeśli $\{e_1, \ldots, e_m\}$ jest bazą M, to $\{ev_{e_i}\}_1^m$ jest bazą dualną do bazy dualnej $\{e^i\}_1^m$. ■

Wniosek: Jeśli $R = k \neq 0$ jest pierścieniem przemiennym oraz $\dim_k M < \infty$, to $\boxed{\dim_k M^* = \dim_k M}$.

Zauważmy że jeśli $M_{CB}(f)$ jest macierzą odwzorowania $M \xrightarrow{f} N$ w bazach B i C, to macierz $M_{B^*C^*}(f^T)$ odwzorowania transponowanego $N^* \xrightarrow{f^T} M^*$ dana jest przez

$$\boxed{M_{B^*C^*}(f^T) = M_{CB}(f)^T}.$$

Istotnie, niech $B := \{b_1, \ldots, b_m\}$, $C := \{c_1, \ldots, c_n\}$. Wtedy otrzymujemy równoważności:

$$f^T(c^j) =: \sum_{i=1}^m f^T_{ij} b^i \iff$$

$$\forall l \in \{1, \ldots, m\} : \left(f^T(c^j)\right)(b_l) = \left(\sum_{i=1}^m f^T_{ij} b^i\right)(b_l) \iff$$

$$\forall l \in \{1, \ldots, m\} : c^j(f(b_l)) = f^T_{lj} \iff \forall l \in \{1, \ldots, m\} : f^T_{lj} = c^j\left(\sum_{j'=1}^n c_{j'} f_{j'l}\right) = f_{jl}.$$

Twierdzenie (Fredholma): Niech k będzie ciałem, $f \in \mathrm{Hom}_k(V, W)$, $\dim_k V, \dim_k W < \infty$. Wtedy $\mathrm{Im}(f) = \{w \in W \mid \varphi(w) = 0 \ \forall \varphi \in \mathrm{Ker}(f^T)\} =: \mathrm{Ker}(f^T)^0$ oraz $\dim_k \mathrm{Im}(f) = \dim_k \mathrm{Im}(f^T)$. **Dowód**: Jest jasne że $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f^T)^0$. Z drugiej strony, $\dim_k \mathrm{Ker}(f^T)^0 = \dim_k W^* - \dim_k \mathrm{Ker}(f^T)$ bo bazę $\mathrm{Ker}(f^T)$ możemy uzupełnić do bazy W^* i wziąć jej bazę dualną. Zatem $\dim_k \mathrm{Im}(f) \leq \dim_k W^* - (\dim_k W^* - \dim_k \mathrm{Im}(f^T)) = \dim_k \mathrm{Im}(f^T)$. Utożsamiając f^{TT} z f dostajemy $\dim_k \mathrm{Im}(f^T) \leq \dim_k \mathrm{Im}(f)$. Stąd $\dim_k \mathrm{Im}(f) = \dim_k \mathrm{Im}(f^T)$ oraz $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f^T)^0$. ■