FORMY DWULINIOWE I KWADRATOWE

Niech M będzie modułem nad przemiennym pierścieniem k. Formą n-liniową na M nazywamy odwzorowanie

$$\underbrace{M \times \ldots \times M}_{n\text{-razy}} \longrightarrow k$$

k-liniowe w każdym argumencie.

Przykład: ① $k^n \times \ldots \times k^n \longrightarrow M_n(k) \xrightarrow{\det} k$.

② $k^n \times k^n \ni (v, w) \longmapsto v^T w \in k$

Twierdzenie: Niech $L(M, M; k)$ oznacza k-moduł z działaniami punktowymi wszystkich form dwuliniowych na M. Niech $\mathrm{Hom}_k(M, M^*)$ będzie k-modułem z działaniami punktowymi. Wtedy odwzorowanie $L(M, M; k) \ni \omega \overset{\wedge}{\longmapsto} \hat{\omega} \in \mathrm{Hom}_k(M, M^*)$, $\left(\hat{\omega}(m)\right)(m') := \omega(m, m')$, jest izomorfizmem modułów.

Dowód: Odwzorowanie ^ jest dobrze zdefiniowane bo $\forall m \in M \cdot \hat{\omega}(m) \in M^*$ oraz $m \mapsto \hat{\omega}(m)$ jest liniowe. Liniowość ^ też jest oczywista:

$((a_1\omega_1 + a_2\omega_2)^\wedge(m))(m') =$
$= (a_1\omega_1 + a_2\omega_2)(m, m') = a_1\omega_1(m,m') + a_2\omega_2(m,m')$
$= \left((a_1\widehat{\omega_1})(m)\right)(m') + \left((a_2\widehat{\omega_2})(m)\right)(m') =$

$= \left((a_1\widehat{\omega_1} + a_2\widehat{\omega_2})(m)\right)(m')$. Jest injekcją bo $\hat{\omega} = 0 \iff \forall m \in M: \hat{\omega}(m) = 0 \iff \forall m, m' \in M:$
$(\hat{\omega}(m))(m') = \omega(m,m') = 0 \iff \omega = 0$.
Wreszcie jest surjekcją bo, jeśli ($f \in Hom_k(V, V^*)$ i) $\omega_f(m, m') :=$
$(f(m))(m') = ev_{m'}(f(m))$, to $\widehat{\omega_f} = f$. Istotnie,
$(\widehat{\omega_f}(m))(m') = \omega_f(m,m') = (f(m))(m')$. ■

Formę dwuliniową $\omega \in L(M, M; k)$ nazywamy:
1) symetryczną $\iff \forall m, m' \in M: \omega(m,m') = \omega(m',m)$,
2) antysymetryczną $\iff \forall m \in M: \omega(m,m) = 0$,
3) niezdegenerowaną $\iff \operatorname{Ker}\hat{\omega} = 0$. Jeśli $\frac{1}{2} \in k$,
to każda forma kwadratowa rozkłada się jedno-

znacznie na sumę formy symetrycznej i antysymetrycznej:

$$\omega(m,m') = \frac{\omega(m,m')+\omega(m',m)}{2} + \frac{\omega(m,m')-\omega(m',m)}{2}.$$

Załóżmy że mamy też rozkład $\omega = \omega_s + \omega_a$, gdzie ω_s jest formą dwuliniową symetryczną a ω_a jest formą dwuliniową antysymetryczną.

Wtedy
$$\frac{\omega(m,m')+\omega(m',m)}{2} = \frac{\omega_s(m,m')+\omega_s(m',m)}{2}$$
$$+\frac{\omega_a(m,m')+\omega_a(m',m)+\omega_a(m,m)+\omega_a(m',m')}{2}$$
$$= \omega_s(m,m') + \frac{1}{2}\omega_a(m+m', m+m') = \omega_s(m,m').$$

Podobnie pokazujemy że $\frac{\omega(m,m')-\omega(m',m)}{2} = \omega_a(m,m')$.

Jeśli $\frac{1}{2} \in K$, to symetryczne formy dwuliniowe są równoważne formom kwadratowym.

<u>Forma kwadratowa</u> na M to odwzorowanie $\alpha: M \to K$ spełniające:

1. $\forall a \in K, m \in M: \ \alpha(am) = a^2 \alpha(m)$,
2. $\check{\alpha}(m,m') := \alpha(m+m') - \alpha(m) - \alpha(m')$ definiuje formę dwuliniową na M. Ta forma jest automatycznie symetryczna.

Jeśli $\omega \in L(M, M; k)$, to $\tilde{\omega}(m) := \omega(m, m)$ definiuje formę kwadratową bo $\tilde{\omega}(am) = a^2\tilde{\omega}(m)$ oraz $\tilde{\omega}(m+m') - \tilde{\omega}(m) - \tilde{\omega}(m') = \omega(m+m', m+m') - \omega(m,m) - \omega(m', m') = \omega(m, m') + \omega(m', m)$ jest wyrażeniem biliniowym. Jeśli ω jest symetryczna i $\frac{1}{2} \in k$, to $\frac{1}{2}\check{\tilde{\omega}} = \omega$.

Podobnie, jeśli α jest formą kwadratową, to $\frac{1}{2}\tilde{\check{\alpha}} = \alpha$ bo $\forall m \in M: (\frac{1}{2}\tilde{\check{\alpha}})(m) =$

$$= \frac{1}{2}\check{\alpha}(m, m) = \frac{1}{2}\left(\alpha(m+m) - \alpha(m) - \alpha(m)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(4\alpha(m) - 2\alpha(m)\right) = \alpha(m).$$ Jeśli $\frac{1}{2} \in k$, to

każda forma kwadratowa α spełnia

warunek równoległoboku:

$$\forall m, m' \in M: \boxed{\alpha(m+m') + \alpha(m-m') = 2\alpha(m) + 2\alpha(m')}.$$

Istotnie, $\alpha(m+m') + \alpha(m-m') = \frac{1}{2}\left(\check{\alpha}(m+m', m+m') + \check{\alpha}(m-m', m-m')\right) = \frac{1}{2}\left(\check{\alpha}(m,m) + \cancel{2\check{\alpha}(m, m')} + \check{\alpha}(m', m') + \check{\alpha}(m, m) + \check{\alpha}(m', m') - \cancel{2\check{\alpha}(m, m')}\right) = \check{\alpha}(m, m) + \check{\alpha}(m', m') =$

$$= 2\frac{1}{2}\tilde{\check{\alpha}}(m) + 2\frac{1}{2}\tilde{\check{\alpha}}(m') = 2\alpha(m) + 2\alpha(m').$$

Twierdzenie: Niech M będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{Q}$. Jeśli $\alpha : M \to \mathbb{Q}$ jest odwzorowaniem spełniającym:

1. $\forall\, a \in \mathbb{Q},\ m \in M : \alpha(am) = a^2 \alpha(m)$,
2. $\forall\, x, y \in M : \alpha(x+y) + \alpha(x-y) = 2\alpha(x) + 2\alpha(y)$,

to α jest formą kwadratową.

Dowód: Wystarczy pokazać biliniowość $\check{\alpha}$. Ze względu na symetryczność $\check{\alpha}$, wystarczy udowodnić liniowość w jednej ze zmiennych. Obliczamy $\check{\alpha}(x_1 + x_2, y)$ korzystając z (2): $\check{\alpha}(x_1 + x_2, y) =$

$$= \alpha(x_1 + x_2 + y) - \alpha(x_1 + x_2) - \alpha(y) =$$

$$= \alpha(x_1 + x_2 + y) - \frac{1}{2}\left(\alpha(x_1 + x_2 + y) + \alpha(x_1 + x_2 - y)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha(x_1 + x_2 + y) - \alpha(x_1 + x_2 - y)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\alpha(x_1 + x_2 + y) + \alpha(y) - \left(\alpha(x_1 + x_2 - y) + \alpha(y)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\alpha(x_1 + x_2 + 2y) + \cancel{\alpha(x_1 + x_2)} - \cancel{\alpha(x_1 + x_2)} - \alpha(x_1 + x_2 - 2y)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\alpha(x_1 + x_2 + 2y) - \alpha(x_1 + x_2 - 2y)\right).$$

Podobnie obliczamy $\check{\alpha}(x_1, y) + \check{\alpha}(x_2, y) =$

$$= \alpha(x_1+y) - \alpha(x_1) - \alpha(y) + \alpha(x_2+y) - \alpha(x_2) - \alpha(y)$$
$$= \alpha(x_1+y) + \alpha(x_2+y) - (\alpha(x_1) + \alpha(x_2)) - \frac{1}{2}\alpha(2y) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\alpha(x_1+x_2+2y) + \alpha(\cancel{x_1-x_2}) - \alpha(x_1+x_2) - \alpha(\cancel{x_1-x_2}) - \alpha(2y)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\alpha(x_1+x_2+2y) - \frac{1}{4}\left(\alpha(x_1+x_2+2y) + \alpha(x_1+x_2-2y)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\alpha(x_1+x_2+2y) - \alpha(x_1+x_2-2y)\right).$$

Zatem $\check{\alpha}(x_1+x_2, y) = \check{\alpha}(x_1, y) + \check{\alpha}(x_2, y)$.

Stąd $\check{\alpha}(nx, y) = n\check{\alpha}(x, y)$ oraz $\check{\alpha}\left(\frac{x}{n}, y\right) =$

$= \frac{1}{n} n \check{\alpha}\left(\frac{x}{n}, y\right) = \frac{1}{n}\check{\alpha}(x, y)$. Dalej, $\check{\alpha}(0, y)$

$= \alpha(y) - \alpha(y) - \alpha(0) = 0 - 0^2\alpha(0) = 0$.

Tak więc $0 = \check{\alpha}(x - x, y) = \check{\alpha}(x, y) + \check{\alpha}(-x, y)$.

Daje to $\check{\alpha}(-x, y) = -\check{\alpha}(x, y)$. Wszystko to razem implikuje liniowość nad $\mathbb{Q}$. ∎

Uwaga: Twierdzenie to modyfikuje się do twierdzenia w którym zamiast $\mathbb{Q}$ bierzemy $\mathbb{R}$. Do udowodnienia $\mathbb{R}$-liniowości korzystamy z gęstości $\mathbb{Q}$ w $\mathbb{R}$ i ciągłości odwzorowania $\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$.