DIAGONALIZACJA FORMY KWADRATOWEJ

Niech M będzie modułem wolnym nad nieżerowalnym przemiennym pierścieniem $k \ni \frac{1}{2}$, a B bazą tego modułu.

Macierzą formy biliniowej $M \times M \xrightarrow{\omega} k$ w bazie B nazywamy odwzorowanie $\boxed{B \times B \ni (b, b') \xmapsto{\omega_B} \omega(b, b') \in k}$.

Niech $v, w \in M$. Jeśli $v_B, w_B \in \bigoplus_B k$ to kolumny współrzędnościowe v i w (tzn. $v =: \sum_{b \in B} b\, v_B(b)$, $w =: \sum_{b \in B} b\, w_B(b)$), to $\omega(v, w) = \sum_{b, b' \in B} v_B(b)\, \omega(b, b')\, w_B(b')$

$= v_B^T \omega_B w_B$. Macierzą formy kwadratowej $\alpha : M \to k$ w bazie B nazywamy $\frac{1}{2} \check{\alpha}_B =: \alpha_B$, gdzie $\check{\alpha}_B$ jest macierzą w bazie B stowarzyszonej z α

formy biliniowej $\check{\alpha}$. Otrzymujemy natychmiast że $\boxed{\forall v \in M : \alpha(v) = v_B^T \alpha_B v_B}$.

Z symetryczności $\check{\alpha}$ dostajemy symetryczność α_B: $\forall b, b' \in B : \frac{1}{2}\check{\alpha}_B(b,b') = \check{\alpha}(b,b') =$
$= \check{\alpha}(b',b) = \check{\alpha}_B(b',b) \Rightarrow \alpha_B^T = \alpha_B$.

(Macierze równe macierzom do nich transponowanym nazywamy symetrycznymi.)

Twierdzenie (Lagrange): Niech k będzie ciałem o charakterystyce $\neq 2$, V przestrzenią wektorową nad k, $\dim_k V = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dla każdej formy kwadratowej $V \xrightarrow{\alpha} k$ istnieje baza B przestrzeni wektorowej V w której macierz α_B jest diagonalna.

Dowód: Niech $E := \{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą V, a $E^* := \{e^1, \ldots, e^n\}$ będzie bazą dualną do E. Zauważmy że zbiór $E^* \cup \{\alpha\}$ jest podzbiorem $\mathrm{Map}(V, k)$, który z działaniami punktowymi jest algebrą z jedynką nad k. Zatem elementy E^* możemy ze sobą i przez skalar mnożyć punktowo. Niech $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^n$ oznacza elementy macierzowe macierzy α_E. Wtedy

$$\forall v \in V: \quad \alpha(v) = \frac{1}{2}\check{\alpha}(v, v) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \check{\alpha}(v_i e_i, v_j e_j)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} v_i \check{\alpha}(e_i, e_j) v_j = \sum_{i,j} v_i \alpha_{ij} v_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e^i(v) e^j(v) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e^i e^j\right)(v).$$

Stąd $\alpha = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} e^i e^j$. Rozważmy teraz

2 alternatywy:

① $\exists i \in \{1, \ldots, n\}: \alpha_{ii} \neq 0$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\alpha_{11} \neq 0$, bo bazę można zawsze przenumerować. Mamy wtedy $\alpha = \alpha_{11}(e^1)^2 + 2e^1 \sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j} e^j +$

$$+ \sum_{i,j=2}^{n} \alpha_{ij} e^i e^j = \alpha_{11}\left(e^1 + \frac{1}{\alpha_{11}} \sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j} e^j\right)^2 +$$

$$+ \sum_{i,j=2}^{n} \tilde{\alpha}_{ij} e^i e^j$$ dla pewnych współczynników $\tilde{\alpha}_{ij}$. Zaiste,

$$\alpha_{11}\Big(e^1 + \frac{1}{\alpha_{11}}\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}e^j\Big)^2 - \alpha_{11}(e^1)^2 - 2e^1\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}e^j$$

$$= \frac{1}{\alpha_{11}}\sum_{i,j=2}^{n}\alpha_{1i}\alpha_{1j}e^i e^j.$$ Zatem $\tilde{\alpha}_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{\alpha_{1i}\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}$, $i,j \in \{2,\dots,n\}$. Zdefiniujmy teraz

$$b^1 := e^1 + \frac{1}{\alpha_{11}}\sum_{j=2}^{n}\alpha_{1j}e^j,$$ i zauważmy że zbiór $\{b^1, e^2,\dots,e^n\}$ jest bazą V^*. Istotnie,

$$a_1 b^1 + \sum_{i=2}^{n} a_i e^i = 0 \Leftrightarrow a_1 e^1 + \sum_{i=2}^{n}\Big(\frac{a_1\alpha_{1i}}{\alpha_{11}} + a_i\Big)e^i = 0$$

$\Rightarrow a_1 = 0$ i $\forall i \in \{2,\dots,n\}: 0 = \frac{a_1\alpha_{1i}}{\alpha_{11}} + a_i = a_i$

$\Rightarrow \{b^1, e^2,\dots,e^n\}$ jest liniowo niezależny, a każdy n-elementowy zbiór liniowo niezależny w n-wymiarowej przestrzeni wektorowej jest automatycznie bazą.

(2) $\forall i \in \{1,\dots,n\}: \alpha_{ii} = 0$. Jeśli wszystkie inne elementy macierzowe też znikają, to $\alpha = 0$ i jest diagonalna w każdej bazie. Załóżmy więc że $\exists\, i,j \in \{1,\dots,n\}: \alpha_{ij} \neq 0$ i $i \neq j$.

Znowu, przenumerowując bazę jeśli trzeba, bez straty ogólności możemy założyć że $\alpha_{12} \neq 0$. Wtedy $\alpha = 2\alpha_{12} e^1 e^2 + \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2 \setminus \{1,2\}^2} \alpha_{ij} e^i e^j$

$$= \frac{1}{2}\alpha_{12}\left((e^1+e^2)^2 - (e^1-e^2)^2\right) + \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2\setminus\{1,2\}^2} \alpha_{ij} e^i e^j .$$

Zdefiniujmy teraz $c^1 := e^1+e^2$, $c^2 := e^1 - e^2$. Zbiór $\{c^1, c^2, e^3, \dots, e^n\}$ jest bazą V^* bo jest liniowo niezależny: $a_1 c^1 + a_2 c^2 + \sum_{i=3}^n a_i e^i = 0$

$$\Leftrightarrow (a_1+a_2)e^1 + (a_1-a_2)e^2 + \sum_{i=3}^n a_i e^i = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = 0,\ a_1 - a_2 = 0,\ \forall i \in \{3,\dots,n\} : a_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1,\dots,n\} : a_i = 0.$$ Z drugiej strony,

$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha_{12}(c^1)^2 - \frac{1}{2}\alpha_{12}(c^2)^2 + 2e^1\sum_{j=3}^n \alpha_{1j} e^j + 2e^2 \sum_{j=3}^n \alpha_{2j} e^j$$

$$+ \sum_{i,j=3}^n \alpha_{ij} e^i e^j = \frac{1}{2}\alpha_{12}(c^1)^2 - \frac{1}{2}\alpha_{12}(c^2)^2 + (c^1+c^2)\sum_{j=3}^n \alpha_{1j} e^j$$

$$+ (c^1 - c^2)\sum_{j=3}^n \alpha_{2j} e^j + \sum_{i,j=3}^n \alpha_{ij} e^i e^j = \frac{1}{2}\alpha_{12}(c^1)^2 - \frac{1}{2}\alpha_{12}(c^2)^2 +$$

$$+\sum_{j=3}^{n}(\alpha_{1j}+\alpha_{2j})c^1e^j+\sum_{j=3}^{n}(\alpha_{1j}-\alpha_{2j})c^2e^j+\sum_{i,j=3}^{n}\alpha_{ij}e^ie^j$$

$$=\frac{1}{2}\alpha_{12}(c^1)^2+0\,c^1c^2+0\,c^2c^1+\left(-\frac{1}{2}\alpha_{12}\right)(c^2)^2+$$

$$+\sum_{j=3}^{n}\frac{\alpha_{1j}+\alpha_{2j}}{2}c^1e^j+\sum_{j=3}^{n}\frac{\alpha_{1j}+\alpha_{2j}}{2}e^jc^1+\sum_{j=3}^{n}\frac{\alpha_{1j}-\alpha_{2j}}{2}c^2e^j$$

$$+\sum_{j=3}^{n}\frac{\alpha_{1j}-\alpha_{2j}}{2}e^jc^2+\sum_{i,j=3}^{n}\alpha_{ij}e^ie^j.$$ Zatem w bazie V do której $\{c^1, c^2, e^3, \ldots, e^n\}$ jest bazą dualną pierwszy diagonalny współczynnik to $\frac{1}{2}\alpha_{12}\neq 0$. Możemy więc zastosować metodę z punktu 1. W ten sposób otrzymujemy bazę w której macierz formy kwadratowej α jest postaci $\begin{pmatrix} \bullet & 0 \\ 0 & \boxed{A_{n-1}} \end{pmatrix}$. Teraz możemy zastosować naszą metodę do A_{n-1}. Po skończonej ilości iteracji otrzymamy macierz diagonalną. ■

Przykład: $V=\mathbb{R}^2$, $\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := xy$. Niech $\tilde{x} := x+y$, $\tilde{y} = x-y$. Wtedy $xy=\frac{1}{2}xy+\frac{1}{2}yx$

$$=\frac{1}{4}\tilde{x}^2-\frac{1}{4}\tilde{y}^2.$$ Szukamy bazy do której jest dualna. Jest nią baza $\{(1,1), (1,-1)\}$

$B=\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. W tej bazie macierz formy kwadratowej α to $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.