

SYGNATURA FORMY KWADRATOWEJ

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k , $\dim V \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, a $V \xrightarrow{\alpha} k$ niech będzie formą kwadratową. Rzędem formy kwadratowej

α nazywamy $\text{rank}(\alpha) := \dim(\text{Im } \hat{\alpha})$, gdzie $\hat{\alpha}(v, w) = \alpha(v+w) - \alpha(v) - \alpha(w)$ oraz $(\hat{\alpha}(v))(w) = \omega(v, w)$. Zauważmy że forma kwadratowa α jest niedegenerowana $\Leftrightarrow \text{rank}(\alpha) = \dim V$. Jeśli $\frac{1}{2} \in k$, to z Twierdzenia

Lagrange'a $\exists$ baza $\{e_i\}_1^n$ przestrzeni V :

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii} (e_i)^2. \quad \text{Dla } k = \mathbb{C}, \text{ możemy}$$

zawsze wybrać $\sqrt{\alpha_{ii}}$. Zmodyfikujemy bazę $\{e_i\}_1^n$ do bazy $\{\tilde{e}_i\}_1^n$, gdzie

$$\begin{cases} \tilde{e}_i = e_i & \text{dla } \alpha_{ii} = 0 \\ \tilde{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{ii}}} e_i & \text{dla } \alpha_{ii} \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Wtedy } \alpha = \sum_{i=1}^n (\sqrt{\alpha_{ii}} e_i)^2$$

$$= \sum_{i \in S} (\tilde{e}_i)^2, \quad \text{gdzie } S := \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \alpha_{ii} \neq 0\}$$

Przenumerowując elementy bazy jeśli trzeba, otrzymujemy $\alpha = \sum_{i=1}^{\text{rank}(\alpha)} (\tilde{e}_i)^2$. Bazę $\{\tilde{e}_i\}_1^n$ na-

zywamy bazą kanoniczną formy kwadratowej α .

Dla $K = \mathbb{R}$ sytuacja jest podobna, ale teraz musimy rozpatrzyć 3 przypadki. Istotnie, nie $\{e_i\}_1^n$ będzie taką bazą że $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_{ii}(e_i)^2$.

Zdefiniujemy elementy nowej bazy

$$\begin{cases} \tilde{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{ii}}} & \text{dla } \alpha_{ii} > 0 \\ \tilde{e}_i = e_i & \text{dla } \alpha_{ii} = 0 \\ \tilde{e}_i = \frac{1}{\sqrt{|\alpha_{ii}|}} & \text{dla } \alpha_{ii} < 0 \end{cases}$$

Wtedy, przemierzając elementy nowej bazy jeśli trzeba,

otrzymujemy $\alpha = \sum_{i=1}^p (\tilde{e}_i)^2 - \sum_{i=p+1}^{\text{rank}(\alpha)} (\tilde{e}_i)^2$. W celu

sprawdzenia że rozmyslenie rząd α to ilość niezerowych współczynników diagonalnych w bazie diagonalizującej, obliczamy $(\hat{\alpha}(e_i))(e_j)$

$$\begin{aligned} &= \hat{\alpha}(e_i, e_j) = \alpha(e_i + e_j) - \alpha(e_i) - \alpha(e_j) = \\ &= \sum_{l=1}^n \alpha_{ll}(e^l)^2(e_i + e_j) - \alpha_{ii} - \alpha_{jj} = \sum_{l=1}^n \alpha_{ll}(\delta_{li} + \delta_{lj})^2 \\ &\quad - \alpha_{ii} - \alpha_{jj} = \sum_{l=1}^n \alpha_{ll} \delta_{li} - \alpha_{ii} + \sum_{l=1}^n \alpha_{ll} \delta_{lj} - \alpha_{jj} \\ &\quad + 2 \sum_{l=1}^n \alpha_{ll} \delta_{li} \delta_{lj} = 2 \delta_{ij} \alpha_{ii} = (2 \alpha_{ii} e^i)(e_j). \end{aligned}$$

Stąd $\hat{\alpha}(e_i) = 2 \alpha_{ii} e^i$. Oznacza to że $\hat{\alpha}$ jest liniową kombinacją takich elementów. Teraz, z liniowej niezależności

ności $\{e^i\}_1^n$, wynika że wymiar obrazu
 jest równy ilości niezerowych d_{ii} . (Rozu-
 manie to działa dla każdego ciała o
 charakterystyce $\neq 2$.) Podobnie jak
 w przypadku zespolonym, bazę $\{\tilde{e}^i\}_1^n$
 nazywamy bazę kanoniczną formy
 kwadratowej α . W tej bazie macierz
 formy α to $\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, \dots, -1}_{\text{rank}(\alpha)-p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-\text{rank}(\alpha)})$

Twierdzenie (Sylvester'a o bezwzględności):

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$,
 $\dim V =: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Niech $\{e^i\}_1^n$ i $\{f^i\}_1^n$

będą bazami kanonicznymi formy
 kwadratowej $V \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$, tzn. niech

$$\alpha = \sum_{i=1}^p (e^i)^2 - \sum_{i=p+1}^{\text{rank}(\alpha)} (e^i)^2 = \sum_{i=1}^q (f^i)^2 - \sum_{i=q+1}^{\text{rank}(\alpha)+q} (f^i)^2.$$

Wtedy $p = q$. (Skrajne przypadki $p=0$ lub $q=n$ można
 łatwo uwzględnić.)

Dowód: Przypuścimy że $p < q$. Wtedy obraz

odwzorowania liniowego $F: V \rightarrow \mathbb{R}^{n+p-q}$,

$$F(v) := (e^1(v), \dots, e^p(v), f^{q+1}(v), \dots, f^n(v))^T$$

ma wymiar $\leq n+p-q < n$. Zatem

$$\exists 0 \neq v_0 \in \text{Ker } F = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(e^i) \cap \bigcap_{j=q+1}^n \text{Ker}(f^j),$$

bo $\dim(\text{Im}(F)) + \dim(\text{Ker } F) = n$. Mamy

$$\alpha(v_0) = \sum_{i=1}^p (e^i(v_0))^2 - \sum_{i=p+1}^{\text{rank}(\alpha)} (e^i(v_0))^2 = - \sum_{i=p+1}^{\text{rank}(\alpha)} (e^i(v_0))^2 \leq 0$$

$$\alpha(v_0) = \sum_{i=1}^q (f^i(v_0))^2 - \sum_{i=q+1}^{\text{rank}(\alpha)} (f^i(v_0))^2 = \sum_{i=1}^q (f^i(v_0))^2 \geq 0$$

Stąd $\alpha(v_0) = 0$. Ale wtedy $\forall i \in \{1, \dots, n\}$:

$f^i(v_0) = 0$. Oznacza to że $v_0 \in \text{Ker}(\tilde{F})$,

$F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{F} := (f^1, \dots, f^n)^T$. Z faktu

że $\{f^i\}_1^n$ jest bazą V^* wynika natychmiast

że $\tilde{F}$ jest izomorfizmem, stąd $\text{Ker}(\tilde{F}) = 0$.

Implikuje to że $v_0 = 0$, co daje pożądaną

sprzeczność. ■

Sygnatura rzeczywistej formy kwadratacej

α nazywamy parę $(p, \text{rank}(\alpha) - p)$, gdzie

p jest ilością dodatnich diagonalnych

współczynników w bazie diagonalizującej

formy kwadratacej α . Sygnatura nie zależy

od wyboru bazy diagonalizującej.

Formę kwadratową $V \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ nazywamy:

① dodatnio określona $(\Leftrightarrow) (v \neq 0 \Rightarrow \alpha(v) > 0)$,

② ujemnie określona $(\Leftrightarrow) (v \neq 0 \Rightarrow \alpha(v) < 0)$.

W tej definicji nie zakłada się $\dim V < \infty$.

Natomiast, jeśli $\dim V \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, to α jest dodatnio określona $(\Leftrightarrow)$ ma sygnaturę

$(\dim V, 0)$ oraz ujemnie określona $(\Leftrightarrow)$

ma sygnaturę $(0, \dim V)$ (dowód na

ćwiczeniach). W szczególności formy

dodatnio i ujemnie określone są między siebie generowane.

Twierdzenie: Niech $\dim_{\mathbb{R}} V =: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Niech $B = \{e_i\}_1^n$ będzie dowolną bazą V . Forma

kwadratowa $V \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ jest dodatnio określona

$(\Leftrightarrow) \forall k \in \{1, \dots, n\} : \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} > 0$, gdzie

$\alpha_{ij} := \frac{1}{2} \alpha(e_i, e_j)$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Dowód: Dla $n=1$ twierdzenie jest oczywiste. Założymy

że twierdzenie jest prawdziwe gdy $\dim_{\mathbb{R}} V \in \{1, \dots, n-1\}$.

Pokażemy że wtedy twierdzenie jest prawdziwe

$\forall V : \dim_{\mathbb{R}} V \in \{1, \dots, n\}$, co kończy dowód przez indukcję.

$\Rightarrow$ Zatożymy że $V \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}$ jest dodatnio określona, a $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Oznaczmy $V_{n-1} := \text{span} \{e_i\}_1^{n-1}$.

Forma kwadratowa $\alpha|_{V_{n-1}}$ też jest dodatnio określona, a jej wyraży macierzowe w bazie $\{e_i\}_1^{n-1}$ to α_{ij} , $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Z założenia indukcyjnego, $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$: $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} > 0$. Pozostaje wykazać że $\det(\alpha_B) > 0$. Z dodatniej określoności α wiemy że istnieje baza B' taka że $\alpha_{B'} = I_n$. Mamy więc $\det(\alpha_B) = \det(M^T \alpha_{B'} M) = \det(M^T) \det(I_n) \det(M) = \det(M)^2 > 0$, gdzie M jest dwuwymiarową macierzą zmiany bazy.

$\Leftarrow$ Zatożymy teraz że $\forall k \in \{1, \dots, n\}$: $\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{k1} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix} > 0$. Z założenia indukcyjnego możemy więc wykazać że $\alpha|_{V_{n-1}}$ jest dodatnio określona. Niech $\{f_i\}_1^{n-1}$ będzie bazą taką że $(\alpha|_{V_{n-1}})F = I_{n-1}$, tzn. $\alpha|_{V_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n-1} (f^i)^2$. Rozszerzmy f^i do V przez $f^i(e_n) = 0$ i oznaczmy tak rozszerzony funkcjonal przez $\tilde{f}^i$. Oznaczmy $\tilde{f}^n := e^n$. Wtedy $\{\tilde{f}^i\}_1^n$ jest bazą V^* (łatwo sprawdzić). Macierz formy α w bazie $\tilde{F} := \{\tilde{f}_i\}_1^n$ jest postaci $\begin{pmatrix} I_{n-1} & | & 0 \\ \hline \dots & & \dots \end{pmatrix}$, więc $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} (\tilde{f}^i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \beta_{ni} \tilde{f}^n \tilde{f}^i + \beta_{nn} (\tilde{f}^n)^2$. Istotnie, $\tilde{f}_i = f_i$ [138]. $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ bo $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$: $\tilde{f}^i(\tilde{f}_i) = \tilde{f}^i(f_i) = e^n(\tilde{f}_i) = 0 = e^n(f_i)$. Zatem w bazie $G := \{g^i\}_1^n$, $g^i := \tilde{f}^i + \beta_{ni} \tilde{f}^n$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $g^n = \tilde{f}^n$, mamy $\alpha = \sum_{i=1}^{n-1} (g^i)^2 + \gamma (g^n)^2$. Skąd $\gamma > 0$ bo $\det \alpha_B = \gamma \det(M)^2$, gdzie M jest macierzą zmiany bazy.