NORMA I ILOCZYN SKALARNY

Niech V będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. **Norma** na V to odwzorowanie

$$\boxed{V \ni v \longmapsto \|v\| \in \mathbb{R}}$$

spełniające:

1. $\forall v, w \in V: \|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$,
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, v \in V: \|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$,
3. $v \neq 0 \Rightarrow \|v\| > 0$.

Przestrzenie wektorowe wyposażone w normę nazywamy **przestrzeniami unormowanymi**.

Przykłady: ① $V = \ell^p(\mathbb{N}) := \{(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Map(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \mid \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^p < \infty\}$, $\|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sqrt[p]{\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^p}$. Szczególnie ważny jest przypadek $p=2$. ② $V = \mathbb{C}^n$, $\|(z_1, \dots, z_n)^T\| := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2}$. O normie wektora myślimy jako o jego długości. Norma pełni rolę pierwiastka z dodatnio określonej formy kwadratowej.

Twierdzenie: Niech $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ będzie normą na zespolonej przestrzeni wektorowej V. Wtedy, jeśli norma spełnia tożsamość równoległoboku $\forall v, w \in V: \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$, to odwzorowanie

$$\boxed{V \times V \ni (v,w) \longmapsto \langle v | w \rangle \in \mathbb{C}}$$

zadane przez $\forall v, w \in V: \langle v | w \rangle :=$
$$\frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 + i\|w+iv\|^2 - i\|w-iv\|^2 \right)$$
spełnia następujące warunki:

① $\forall u, v, w \in V: \quad \langle u | v+w \rangle = \langle u | v \rangle + \langle u | w \rangle$,

② $\forall \lambda \in \mathbb{C}, u, v \in V: \quad \langle u | \lambda v \rangle = \lambda \langle u | v \rangle$,

③ $\forall u, w \in V: \quad \overline{\langle v | w \rangle} = \langle w | v \rangle$,

④ $v \neq 0 \Rightarrow \langle v | v \rangle > 0$.

Dowód: Wykazanie własności ① i ② wymaga sporo pracy (patrz materiały dodatkowe). Tu udowodnimy tylko własności ③ - ④. Mamy
$$4\,\overline{\langle v | w \rangle} - 4\langle w | v \rangle = i\left(-\|w+iv\|^2 + \|w-iv\|^2 - \|v+iw\|^2 + \|v-iw\|^2 \right) = i\left(\|w-iv\|^2 - |i|^2\|w-iv\|^2\right.$$

$+ \|v - iw\|^2 - |i|^2 \|v - iw\|^2) = 0$. Zaś własność ④ wynika z rachunku

$$\langle v|v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|2v\|^2 + i\,|1+i|^2\|v\|^2 - i\,|1-i|\,\|v\|^2 \right)$$

$$= \|v\|^2 + \frac{i\|v\|^2}{4}\left(|1+i|^2 - |\overline{1+i}|^2 \right) = \|v\|^2. \blacksquare$$

Odwzorowanie $V \xrightarrow{\langle\,|\,\rangle} \mathbb{C}$ spełniające warunki ①- ④ powyższego twierdzenia nazywamy iloczynem skalarnym.

Twierdzenie (Bunyakovsky- Cauchy- Schwarz).

$$\boxed{\forall v, w \in V: \quad |\langle v|w\rangle|^2 \leqslant \langle v|v\rangle \langle w|w\rangle}$$

Dowód: Jeśli $v = 0$, to $\langle v|w\rangle = \overline{\langle w|0\rangle} = \overline{\langle w|0\rangle} + \overline{\langle w|0\rangle} \Rightarrow \langle v|w\rangle = 0$. Zatem nierówność jest spełniona. Założmy więc, że $v \neq 0$, i rozpatrzmy funkcję $\mathbb{R} \ni t \mapsto \beta(t) := \langle tv + w | tv + w\rangle \in \mathbb{R}$. Zatem $\beta(t) = t^2\langle v|v\rangle + 2t\,\mathrm{Re}\langle v|w\rangle + \langle w|w\rangle \geqslant 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Wyróżnik tego wyrażenia kwadratowego jest niedodatni bo $\langle v|v\rangle > 0$. Stąd $(\mathrm{Re}\langle v|w\rangle)^2 \leq \langle v|v\rangle\langle w|w\rangle$. Niech $\langle v|w\rangle =: e^{i\varphi}|\langle v|w\rangle|$. Wtedy $|\langle v|w\rangle| = \langle v|e^{-i\varphi}w\rangle = \mathrm{Re}\langle v|e^{-i\varphi}w\rangle$, co pociąga za sobą $|\langle v|w\rangle|^2 = (\mathrm{Re}\langle v|e^{-i\varphi}w\rangle)^2 \leq$

$\leq \langle v|v\rangle\langle e^{-i\varphi}w|e^{-i\varphi}w\rangle = \langle v|v\rangle e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\langle w|w\rangle = \langle v|v\rangle\langle w|w\rangle$.

Zauważmy że równość w tej nierówności zachodzi $\Leftrightarrow$ w i v są liniowo zależne. Istotnie, $|\langle v|\lambda v\rangle|^2 = |\lambda|^2\langle v|v\rangle^2 = \langle v|v\rangle\langle\lambda v|\lambda v\rangle$. Podobnie dla $v = \lambda w$. Z drugiej strony, jeśli $v=0$, to w i v są liniowo zależne. Jeśli $v \neq 0$ i $|\langle v|w\rangle|^2 = \langle v|v\rangle\langle w|w\rangle$, to zeruje się wyróżnik wyrażenia kwadratowego $\gamma(t) := \langle tv + e^{-i\varphi}w | tv + e^{-i\varphi}w\rangle$. Oznacza to że $\exists!\, t_0 \in \mathbb{R} : \gamma(t_0) = 0$. Stąd $t_0 v + e^{-i\varphi}w = 0$, czyli $w = e^{i\varphi}t_0 v$.

<u>Wniosek</u>: Każdy iloczyn skalarny zadaje normę wzorem $\boxed{\forall v \in V : \|v\| := \sqrt{\langle v|v\rangle}}$.

<u>Dowód</u>: Jedyny nietrywialny warunek do

sprawdzenia to $\|v+w\| \leq \|v\|+\|w\|$. Jest on równoważny warunkowi $\|v+w\|^2 \leq (\|v\|+\|w\|)^2$, czyli $\|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2$, czyli $\operatorname{Re}\langle v|w\rangle \leq \|v\|\,\|w\|$. Z drugiej strony,

$$\operatorname{Re}\langle v|w\rangle \leq |\operatorname{Re}\langle v|w\rangle| \leq \sqrt{(\operatorname{Re}\langle v|w\rangle)^2 + (\operatorname{Im}\langle v|w\rangle)^2}$$

$$= |\langle v|w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|. \quad \blacksquare$$

Zauważmy że tylko normy spełniające tożsamość równoległoboku pochodzą od iloczynu skalarnego. Istotnie, jeśli $\|v\| = \sqrt{\langle v|v\rangle}$, to $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 =$

$$= \langle v|v\rangle + 2\operatorname{Re}\langle v|w\rangle + \langle w|w\rangle + \langle v|v\rangle - 2\operatorname{Re}\langle v|w\rangle$$

$$+ \langle w|w\rangle = 2\langle v|v\rangle + 2\langle w|w\rangle = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Zauważmy też że odwzorowanie $V \ni v \mapsto \langle v| \in V^*$ jest zawsze injekcją bo $\langle v| = 0 \iff \forall w \in V: \langle v|w\rangle = 0 \Rightarrow \langle v|v\rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Jeśli $\dim_{\mathbb{C}} V < \infty$, to jest też surjekcją. Zaiste, $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^* \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V^*$. Zatem, $\mathbb{R}$-liniowość $v \mapsto \langle v|$ i injektywność implikuje surjektywność.

Przykłady: ① $V = \ell^2(\mathbb{N})$, $\langle (v_n)_{n\in\mathbb{N}} | (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \overline{v_n} w_n$. ② $V = \mathbb{C}^n$, $\langle (v_1, \dots, v_n)^T | (w_1, \dots, w_n)^T \rangle := \sum_{k=1}^{n} \overline{v_k} w_k$. Np. dla $n=2$ $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2$.

Przestrzenią ortogonalną do podprzestrzeni wektorowej $W \subseteq V$ nazywamy

$$\boxed{W^\perp := \{ v \in V \mid \langle v | w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}}.$$

Jest oczywiste że $W^\perp$ jest podprzestrzenią wektorową V, że $0^\perp = V$, że $V^\perp = 0$, oraz że $W \subseteq W^{\perp\perp}$. Mamy też $W \cap W^\perp = 0$.

Twierdzenie: Jeśli $\dim_{\mathbb{C}} V =: n \in \mathbb{N}$, to dla każdej podprzestrzeni wektorowej $W \subseteq V$ zachodzi $\boxed{V = W \oplus W^\perp}$.

Dowód: Niech $\{e_i\}_1^n$ będzie bazą V taką że $\{e_i\}_1^k$ jest bazą W. Wtedy $W^\perp = \mathrm{Ker}(V \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k)$, $f := (\langle e_1|, \dots, \langle e_k|)$. Stąd $\dim W^\perp = n - \dim(\mathrm{Im} f) \geqslant n-k$. Zatem $\dim(W \oplus W^\perp) \geqslant k + n - k = n$, co implikuje $W \oplus W^\perp = V$. ∎