

ENDOMORFIZMY HERMITOWSKIE, NORMALNE, UNITARNE I IZOMETRIE

Niech V będzie zespoloną przestrzenią
wektorową z iloczynem skalarnym

$$\forall x, y \in V \ni (x, y) \mapsto \langle x | y \rangle \in \mathbb{C}.$$

Niech $h \in \text{End}(V)$. Endomorfizm
 h nazywamy hermitowskim (samo-
sprężonym) $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in V: \langle h(x) | y \rangle = \langle x | h(y) \rangle.$$

Endomorfizm g nazywamy izometrią

$$\Leftrightarrow \forall x, y \in V: \langle g(x) | g(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

Endomorfizm g nazywamy unitarnym

$\Leftrightarrow$ jest odwracalną izometrią.

Podstawiając $x = g^{-1}(x')$, $y = g^{-1}(y')$, otrzymujemy

$$\forall x', y' \in V: \langle x' | y' \rangle = \langle g^{-1}(x') | g^{-1}(y') \rangle.$$

Zauważając jeszcze że $\forall x, y \in V: \langle \text{id}(x) | \text{id}(y) \rangle = \langle x | y \rangle$ możemy wyznaczyć:

Wniosek: Zbiór wszystkich endomorfizmów unitarnych

$$U(V) := \{ g \in GL(V) \mid \forall x, y \in V: \langle g(x) | g(y) \rangle = \langle x | y \rangle \}$$

jest grupą ze względu na składanie odwzorowań. ($U(V)$ nazywamy grupą unitarną.)

Obserwacja: Jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością własną izometrii g , to $|\lambda| = 1$. W szczególności własność tę mają wartości własne endomorfizmów unitarnych.

Dowód: $\exists x \neq 0: g(x) = \lambda x \Rightarrow$

$$\begin{aligned} 0 < \langle x | x \rangle &= \langle g(x) | g(x) \rangle = \langle \lambda x | \lambda x \rangle \\ &= \bar{\lambda} \lambda \langle x | x \rangle \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1. \end{aligned}$$

Uwaga: Jeśli V jest zupełne (każdy ciąg Cauchy'ego jest zbieżny) ze względu na metrykę indukowaną przez normę

pochoǳącą z iloczynu skalarnego, to
każdy element spektrum endomorfizmu
unitarnego jest unitarny ($|\lambda| = 1$).
Nie jest to prawda w przypadku izo-
metrii, tzn. elementy spektrum nie
muszą być unitarne.

Obserwacja: Jeśli $\lambda \in \mathbb{C}$ jest wartością
własną endomorfizmu hermitowskiego
 h , to $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dowód: $\exists x \neq 0 : h(x) = \lambda x$. Zatem

$$\langle h(x) | x \rangle = \langle x | h(x) \rangle \Leftrightarrow$$

$$\langle \lambda x | x \rangle = \langle x | \lambda x \rangle \Leftrightarrow$$

$$\bar{\lambda} \langle x | x \rangle = \lambda \langle x | x \rangle \Leftrightarrow \bar{\lambda} = \lambda \quad (\text{bo } \langle x | x \rangle \neq 0).$$

Uwaga: Podobnie jak w przypadku unitarnym,
spektrum operatora hermitowskiego jest rzeczywiste.

Przykłady: ① Izometria która nie jest
unitarna. Niech $V := \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{C}$ z iloczy-

nem skalarnym danym wzorem $\langle x | y \rangle$
 $:= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{x}_n y_n$. Niech $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ będzie bazą

kanoniczną V . Endomorfizm s zdefiniowany na $\{e_i\}_{i=0}^{\infty}$ wzorem $s(e_i) = e_{i+1}$, $\forall i \in \mathbb{N}$ jest izometria, która nie jest unitarna. Zauważmy,

$$\begin{aligned} \langle s(x) | s(y) \rangle &= \left\langle s\left(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i e_i\right) \middle| s\left(\sum_{j \in \mathbb{N}} y_j e_j\right) \right\rangle \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \bar{x}_i y_j \langle s(e_i) | s(e_j) \rangle = \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \bar{x}_i y_j \langle e_{i+1} | e_{j+1} \rangle \\ &= \sum_{i, j \in \mathbb{N}} \bar{x}_i y_j \langle e_i | e_j \rangle = \langle x | y \rangle, \text{ ale} \end{aligned}$$

$0 \neq e_0 \in \ker s$, więc s nie jest odwracalna.

② Przykład endomorfizmu unitarnego.

Niech $V = \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym

$$\langle x | y \rangle := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{x}_n y_n. \text{ Niech}$$

u będzie endomorfizmem zadanym

wzorem $\forall n \in \mathbb{Z} : u(e_n) = e_{n+1}$. Z identycznego rachunku jak poprzednio, wnioskujemy że u jest izometria. Z drugiej strony, u^{-1} dane jest wzorem $u^{-1}(e_n) = e_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. 1148

Bazę $\{e_i\}_{i \in I}$ nazywamy ortonormalną

$$\Leftrightarrow \boxed{\forall i, j \in I: \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}}$$

Obserwacja: Jeśli B jest bazą ortonormalną, to

① h jest endomorfizmem hermitowskim $\Leftrightarrow$
elementy macierze macierzy $M_B(h)$
spełniają $\forall i, j \in I: \overline{h_{ij}} = h_{ji} \quad (\overline{M_B(h)} = M_B(h)^T)$;

② g jest izometrią $\Leftrightarrow$ elementy macierze
macierzy $M_B(g)$ spełniają $\forall i, j \in I$:

$$\sum_{k \in I} \overline{g_{ki}} g_{kj} = \delta_{ij} \quad (M_B(g)^T M_B(g) = I_B).$$

Dowód: ① $\forall x, y \in V: \langle h(x) | y \rangle = \langle x | h(y) \rangle$

$$\Leftrightarrow \forall i, j \in I: \langle h(e_i) | e_j \rangle = \langle e_i | h(e_j) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall i, j \in I: \sum_{k \in I} \overline{h_{ki}} \langle e_k | e_j \rangle = \sum_{k \in I} h_{kj} \langle e_i | e_k \rangle$$

$$\Leftrightarrow \forall i, j \in I: \overline{h_{ji}} = h_{ij}. \quad \textcircled{2} \text{ Analogicznie}$$

$$\text{Mierzamy } \delta_{ij} = \langle e_i | e_j \rangle = \langle g(e_i) | g(e_j) \rangle$$

$$= \sum_{k, l \in I} \overline{g_{ki}} g_{lj} \langle e_k | e_l \rangle = \sum_{k \in I} \overline{g_{ki}} g_{ki}.$$

Jeśli V jest zespoloną przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym takim że istnieje baza ortonormalna $\{e_i\}_{i \in I}$, to możemy zdefiniować sprzężenie hermitowskie f^* endomorfizmu $f \in \text{End}(V)$ wzorem

$$\forall i \in I: f^*(e_i) := \sum_{k \in I} \overline{f_{ik}} e_k, \text{ gdzie}$$

$$f(e_i) =: \sum_{j \in I} f_{ji} e_j. \text{ Otrzymujemy natychmiast}$$

$$\langle f^*(x) | y \rangle = \sum_{i,j \in I} \bar{x}_i y_j \langle f^*(e_i) | e_j \rangle = \sum_{i,j,k \in I} \bar{x}_i y_j f_{ik} \langle e_k | e_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j \in I} \bar{x}_i y_j f_{ij} = \sum_{i,j,k \in I} \bar{x}_i y_j f_{ki} \langle e_i | e_k \rangle = \langle x | f(y) \rangle.$$

Uwaga: $\dim V < \infty \Rightarrow \langle f^*(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$

$\forall x, y \in V$ definiuje f^* .

Twierdzenie: $\forall f, g \in \text{End}(V), \lambda \in \mathbb{C}$:

① $f^{**} = f$, ② $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$, ③ $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Endomorfizm f nazywamy normalnym

$\Leftrightarrow f \circ f^* = f^* \circ f$. Endomorfizmy hermitowskie i unitarne są normalne, ale izometrie niekoniecznie (np. izometria s nie jest normalna).