ROZKŁAD SPEKTRALNY I ROZKŁAD BIEGUNOWY

Uwagi: ① Definicja sprzężenia hermitowskiego nie zależy od wyboru bazy ortonormalnej. Istotnie, niech $\{e_i\}_{i\in I}$ oraz $\{e'_i\}_{i\in I}$ będą bazami ortonormalnymi względem dowolnego lecz ustalonego iloczynu skalarnego na zespolonej przestrzeni wektorowej V. Niech $\forall i \in I$:

$$f(e_i) =: \sum_{k\in I} f_{ki} e_k, \qquad f(e'_i) =: \sum_{k\in I} f'_{ki} e'_k$$

oraz $f^*(e_i) := \sum_{k\in I} \overline{f_{ik}} e_k$, $f^{*\prime}(e'_i) := \sum_{k\in I} \overline{f'_{ik}} e'_k$.

Wówczas, $\forall x, y \in V$: $\langle f^*(x) | y\rangle = \langle x | f(y)\rangle$

$= \langle f^{*\prime}(x) | y \rangle \iff \forall x \in V: f^*(x) = f^{*\prime}(x)$

$\iff f^* = f^{*\prime}$.

② Niech V będzie dowolną zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w bazę ortonormalną $\{e_i\}_{i\in I}$ wektorów własnych endomorfizmu $f \in End(V)$. Wtedy $\forall i,j \in I$: $\langle e_i | (f \circ f^*)(e_j) \rangle$

$= \langle f^*(e_i) | f^*(e_j) \rangle = \langle \sum_{k\in I} \overline{f_{ik}} e_k | \sum_{l\in I} \overline{f_{jl}} e_l \rangle$

$= \langle \overline{f_{ii}} e_i | \overline{f_{jj}} e_j \rangle = f_{ii} \overline{f_{jj}} \delta_{ij} = \overline{f_{ii}} f_{jj} \delta_{ij} =$

$= \langle f_{ii} e_i | f_{jj} e_j \rangle = \langle f(e_i) | f(e_j) \rangle =$

$= \langle e_i | (f^* \circ f)(e_j) \rangle$, skąd $f \circ f^* = f^* \circ f$.

3 Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową, $\dim V =: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wyposażoną w iloczyn skalarny. Wtedy $f \in End(V)$ normalny $\Rightarrow \forall F \in Map(spec f, \mathbb{C})$ $\exists F(f) \in End(V)$. Wynika to ze słynnego twierdzenia Gelfanda-Naimarka o przemiennych C^*-algebrach.

Niech V będzie dowolną zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w bazę ortonormalną. Rzutem ortogonalnym nazywamy endomorfizm $p \in \mathrm{End}(V)$ spełniający $p^2 = p$ i $p^* = p$ (samosprzężony idempotent).

Twierdzenie: Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową, $\dim V =: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, wyposażoną w iloczyn skalarny. Wtedy idempotent $p \in \mathrm{End}(V)$ jest samosprzężony $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, p = (\mathrm{Im}\, p)^\perp$.

Dowód: ($\Rightarrow$) $\dim V < \infty \Rightarrow V = \mathrm{Ker}\, p \oplus (\mathrm{Ker}\, p)^\perp$ oraz że $\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, p) + \dim(\mathrm{Im}\, p)$. Zatem $\dim(\mathrm{Im}\, p) = \dim(\mathrm{Ker}\, p)^\perp$, więc wystarczy wykazać $\mathrm{Im}\, p \subseteq (\mathrm{Ker}\, p)^\perp$. Niech $v \in \mathrm{Ker}\, p$. Wtedy $\langle v | p(w) \rangle = \langle p^*(v) | w \rangle = \langle p(v) | w \rangle = 0$.

($\Leftarrow$) $\dim V < \infty \Rightarrow \forall$ podprzestrzeni $W \subseteq V$: $W^{\perp\perp} = W$. Istotnie, $V = W \oplus W^\perp = W^\perp \oplus W^{\perp\perp}$ implikuje $\dim W = \dim W^{\perp\perp}$, co w połączeniu z $W \subseteq W^{\perp\perp}$ daje $W = W^{\perp\perp}$. Zatem $\mathrm{Ker}\, p = (\mathrm{Im}\, p)^\perp \Rightarrow \mathrm{Im}\, p = (\mathrm{Ker}\, p)^\perp$. Daje to

$V = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$ oraz $\operatorname{Ker} p \perp \operatorname{Im} p$. Dalej, jest oczywiste że $\operatorname{Im}(id - p) \subseteq \operatorname{Ker} p$. Z drugiej strony, $v \in \operatorname{Ker} p \Rightarrow v = v - pv = (id-p)v \Rightarrow v \in \operatorname{Im}(id-p)$. Zatem $\operatorname{Im}(id-p) = \operatorname{Ker} p$. Stąd $\operatorname{Im}(id-p) \perp \operatorname{Im} p$, co daje:

$\forall v, w \in V$: $\langle p^*(v) | w \rangle = \langle v | p(w) \rangle =$

$= \langle p(v) + (id-p)(v) \mid p(w) \rangle = \langle p(v) | p(w) \rangle$

$= \langle p(v) | p(w) + (id-p)(w) \rangle = \langle p(v) | w \rangle$.

Implikuje to że $p^* = p$. ■

Jeśli $\dim V =: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $p = p^* \in \operatorname{End}(V)$, to istnieje baza ortonormalna $\{e_i\}_1^n$ wektorów własnych p. Ponieważ $p(\operatorname{Im} p) \subseteq \operatorname{Im} p$, istnieje baza ortonormalna $\operatorname{Im} p$ wektorów własnych p. Oczywiście istnieje też baza ortonormalna $\operatorname{Ker} p$ wektorów własnych p. Zatem, jeśli p jest rzutem ortogonalnym, to istnieje baza ortonormalna $\{e_i\}_1^n$ wektorów własnych p taka że $\operatorname{span}\{e_i\}_1^k = \operatorname{Ker} p$ oraz $\operatorname{span}\{e_i\}_{n-k+1}^n = \operatorname{Im} p$. Wynika to z tego że dla rzutu ortogonalnego p mamy $V = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$ oraz $\mathrm{Ker}\, p \perp \mathrm{Im}\, p$.

Mamy też $\forall v \in V:\ p(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i\, p(e_i) =$

$$= \sum_{i=n-k+1}^{n} v_i\, p(e_i) = \sum_{i=n-k+1}^{n} v_i\, p(p(e_i')) = \sum_{i=n-k+1}^{n} v_i\, p(e_i')$$

$$= \sum_{i=n-k+1}^{n} v_i e_i = \sum_{i=n-k+1}^{n} e_i \langle e_i | v \rangle.$$ Symbolicznie

zapisujemy $p = \sum_{i=n-k+1}^{n} |e_i\rangle\langle e_i|$. Jeśli f jest endomorfizmem normalnym a $\{e_i\}_1^n$ jest bazą ortonormalną jego wektorów własnych, to

$$\boxed{f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |e_i\rangle\langle e_i|}$$, gdzie $\forall i \in \{1,\dots,n\}:$ $f(e_i) =: \lambda_i e_i$.

Zaiste, $\forall j \in \{1,\dots,n\}:\ f(e_j) = \lambda_j e_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, |e_i\rangle\langle e_i | e_j\rangle$. Grupując wektory własne według <u>różnych</u> wartości własnych otrzymujemy <u>rozkład spektralny</u>

endomorfizmu normalnego: $f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j P_j$,

gdzie $P_j = \sum_{i \in \Lambda_j} |e_i\rangle\langle e_i|$, $\Lambda_j := \{k \in \{1, \ldots, n\} \mid f(e_k) = \lambda_j e_k\}$. Endomorfizmy P_j są rzutami ortogonalnymi na przestrzenie własne $\mathrm{Ker}(f - \lambda_j \mathrm{id})$. Widać natychmiast że $P_j P_k = \delta_{jk}$ oraz $\sum_{j=1}^{m} P_j = \mathrm{id}$.

Teraz niech $f \in \mathrm{End}(V)$, $\dim V =: n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, będzie dowolnym endomorfizmem zespolonej przestrzeni wektorowej V. **Wartością bezwzględną** (modułem) endomorfizmu f nazywamy $\boxed{|f| := \sqrt{f^* f}}$. Definicja ma sens bo $(f^* f)^* = f^* f$ i $\mathrm{spec}(f^* f) \geq 0$.

Twierdzenie (rozkład biegunowy): Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny oraz niech $\dim V \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wtedy $\forall f \in \mathrm{End}(V)\ \exists u \in U(V)$: $\boxed{f = u \circ |f|}$. Jeśli f jest bijekcją, to rozkład jest jednoznaczny, tzn. $\exists! u \in U(V): f = u \circ |f|$.