ELEMENTY GEOMETRII

Iloczyn skalarny na rzeczywistej przestrzeni wektorowej definiuje się tak samo jak w przypadku zespolonym. Tylko że teraz warunek $\langle X|Y\rangle = \overline{\langle Y|X\rangle}$ dla przestrzeni zespolonych przybiera formę $(X|Y) = (Y|X)$ dla przestrzeni rzeczywistych. Rzeczywistą przestrzeń wektorową z ustalonym iloczynem skalarnym nazywamy <u>przestrzenią euklidesową</u>. W celu wywnioskowania własności rzeczywistego iloczynu skalarnego $(\ |\ )$ z własności zespolonego iloczynu skalarnego $\langle\ |\ \rangle$, przydatne jest pojęcie kompleksyfikacji. <u>Kompleksyfikacją</u> rzeczywistej przestrzeni wektorowej V nazywamy zespoloną przestrzeń wektorową $V^{\mathbb{C}}$ zdefiniowaną w następujący sposób:

$V^{\mathbb{C}} := V \times V$ jako rzeczywista przestrzeń wektorowa,

$\forall (x,y) \in V \times V: \quad \boxed{i(x,y) := (-y, x)}$.

Zauważmy że dla $V = \mathbb{R}$ otrzymujemy $\mathbb{C}$ jako przestrzeń wektorową nad $\mathbb{C}$: $i(x+iy) = i^2 y + ix = -y + ix$. Można łatwo sprawdzić że powyższe 2 warunki definiują strukturę zespolonej przestrzeni wektorowej na $V^{\mathbb{C}}$. Przestrzeń wektorowa V jest rzeczywistą podprzestrzenią wektorową $V^{\mathbb{C}}$ poprzez włożenie $V \ni x \mapsto (x,0) \in V^{\mathbb{C}}$. Łatwo też sprawdzić że, jeśli $(\ |\ )$ jest iloczynem skalarnym na V, to $\forall x, x', y, y' \in V$:

$$\boxed{\langle (x,y) | (x',y') \rangle := (x|x') + (y|y') + i\big((x|y') - (y|x')\big)}$$

definiuje zespolony iloczyn skalarny $\langle\ |\ \rangle$ na $V^{\mathbb{C}}$. Istotnie, $\langle (x',y') | (x,y) \rangle$

$$= (x'|x) + (y'|y) + i\big((x'|y) - (y'|x)\big) =$$

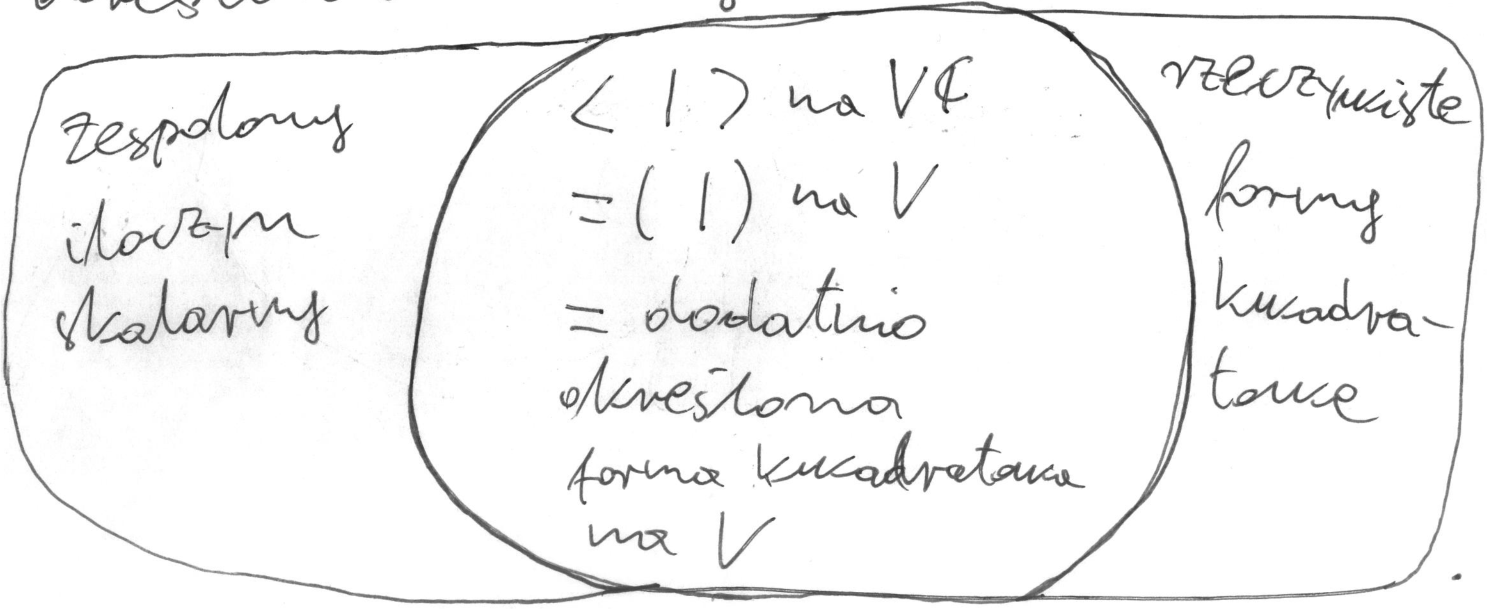
$$= \overline{(x|x') + (y|y') + i\big((y|x') - (x|y')\big)} = \overline{\langle (x,y) | (x',y') \rangle}.$$

Podobnie, $\langle (x,y) | i(x',y') \rangle = \langle (x,y) | (-y', x') \rangle =$

$$= -(x|y') + (y|x') + i\big((x|x') + (y|y')\big) = i\langle (x,y) | (x',y') \rangle.$$

Ponieważ zawężenie $\langle\, | \,\rangle$ z $V^{\mathbb{C}} \times V^{\mathbb{C}}$ do $V \times V$ daje $(\,|\,)$, możemy wywnioskować że rzeczywisty iloczyn skalarny dziedziczy własności zespolonego iloczynu skalarnego (np. Bunyakovski-Cauchy-Schwarz, równoległobok).

Z drugiej strony, rzeczywisty iloczyn skalarny jest symetryczną formą biliniową taką że stowarzyszona z nią forma kwadratowa jest dodatnio określona. Mamy więc:

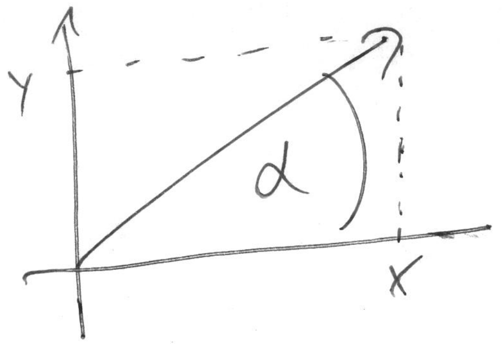


Niech V będzie przestrzenią euklidesową.

$\forall\, x, y \in V \setminus \{0\}$: $\boxed{\cos(x,y) := \dfrac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}}$.

Tutaj, tak jak w przypadku zespolonym, $\|x\| := \sqrt{(x|x)}$. Zauważmy że dla $V=\mathbb{R}^2$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) := x_1 y_1 + x_2 y_2$ dostajemy

$$\cos\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$



$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Twierdzenie (Pitagorasa): Niech V będzie przestrzenią euklidesową, $x, y \in V$. Wtedy $(x|y) = 0 \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Dowód: $\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + 2(x|y) + (y|y) = \|x\|^2 + \|y\|^2$. ■

Niech $W \leq V$ będzie podprzestrzenią przestrzeni euklidesowej V, $x \in V$. Odległością x od W nazywamy

$d(x,W) := \inf\limits_{y\in W} \|x-y\|$.

Macierzą Grama ciągu wektorów $(v_1,\dots,v_k)$ nazywamy $G(v_1,\dots,v_k)$ odwzorowanie $\{1,\dots,k\}^2 \ni (i,j) \mapsto (v_i|v_j) \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie: Niech $(v_1,\dots,v_k)$ będzie ciągiem wektorów przestrzeni euklidesowej V. Wtedy:

(1) $\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = 0 \implies \forall i \in \{1,\dots,k\}: \alpha_i = 0\right) \iff \det G(v_1,\dots,v_k) \neq 0$.

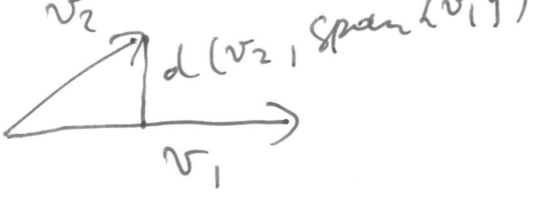
(2) Jeśli (1), to

$$\forall v \in V: \quad \boxed{d\left(v, \operatorname{span}\{v_i\}_1^k\right) = \sqrt{\frac{\det G(v_1,\dots,v_k,v)}{\det G(v_1,\dots,v_k)}}}.$$

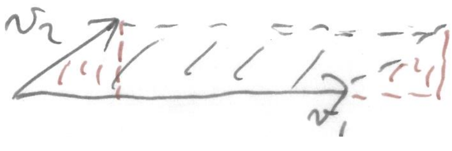
Objętością pojedynczego wektora nazywamy jego długość: $\operatorname{vol}(v) = \|v\|$.

Rekurencyjnie, **objętość** ciągu wektorów $(v_1,\dots,v_{k+1})$ definiujemy wzorem

$$\boxed{\operatorname{vol}(v_1,\dots,v_{k+1}) := d\left(v_{k+1}, \operatorname{span}\{v_i\}_1^k\right) \operatorname{vol}(v_1,\dots,v_k)}.$$



$\operatorname{vol}(v_1,v_2) = $ pole



Twierdzenie: Niech $(v_1, \dots, v_k)$ będzie ciągiem wektorów przestrzeni euklidesowej V. Wtedy $\boxed{\mathrm{Vol}(v_1, \dots, v_k) = \sqrt{G(v_1, \dots, v_k)}}$.

Niech $V := \mathbb{R}^n$ będzie przestrzenią euklidesową z kanonicznym iloczynem skalarnym $\left(\left((x_1, \dots, x_n)^T \,|\, (y_1, \dots, y_n)^T\right) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)$.

Iloczynem wektorowym ciągu wektorów $(v_1, \dots, v_n)$ nazywamy jedyny wektor $w \in \mathbb{R}^n$ spełniający

$$\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^n: \ \det(v_1, \dots, v_{n-1}, v) =: (w \,|\, v)}.$$

Odwzorowanie $\mathbb{R}^n \ni v \mapsto \det(v_1, \dots, v_{n-1}, v) \in \mathbb{R}$ jest liniowe, a odwzorowanie $\mathbb{R}^n \ni w \mapsto (w|\ \in \mathbb{R}^*$ jest izomorfizmem. Zatem $\exists!\, w \in \mathbb{R}^n$ spełniające powyższy warunek. Piszemy $w =: v_1 \times v_2 \times \dots \times v_{n-1}$. Wreszcie, niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią euklidesową. Kwadryką w V nazywamy zbiór $f^{-1}(0)$, gdzie $V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f = f_0 + f_1 + f_2$, $f_0 \in \mathbb{R}$, $f_1 \in V^*$, f_2 jest formą kwadratową na V.