

CIĄŁO LICZB ZESPOŁONYCH

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C}:$$
$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d),$$

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac-bd, ad+bc).$$

W szczególności $(a,0) \cdot (c,0) = (ac,0)$.
Zatem $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x,0) \in \mathbb{C}$ jest
homomorfizmem ciał. Zauważmy że
 $(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$. Dlatego
 $\sqrt{-1} = \sqrt{(-1,0)} = (0,1)$. Tradycyjnie
 $i := (0,1)$, $(a,b) = a + ib$.

Sprzężenie zespolone to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni a+ib \mapsto \overline{a+ib} := a-ib \in \mathbb{C}.$$

Moduł (wartość bezwzględna) to

$$\text{odwzorowanie } \mathbb{C} \ni a+ib \mapsto |a+ib| := \sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}.$$

Część rzeczywista to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni a+ib \mapsto \boxed{\operatorname{Re}(a+ib) := a} \in \mathbb{R}.$$

Część urojona to odwzorowanie

$$\mathbb{C} \ni a+ib \mapsto \boxed{\operatorname{Im}(a+ib) := b} \in \mathbb{R}. \text{ Liczbę}$$

i nazywamy liczbą urojoną.

Elementarne własności:

$$\textcircled{1} \forall z \in \mathbb{C} : \overline{\overline{z}} = z \text{ (inwertywność)}$$

$$\textcircled{2} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2},$$
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}.$$

$$\text{Istotnie, } \overline{(a+ib)(c+id)} = \overline{(a+ib)(c+id)} = (a-ib)(c-id) =$$
$$= ac + i^2 bd - i(bc+ad) = ac - bd - i(bc+ad)$$
$$= \overline{(a+ib)(c+id)}.$$

$$\textcircled{3} \forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{z} = |z|^2, \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2},$$
$$\operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}, |\overline{z}| = |z|.$$

$$\textcircled{4} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|,$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Krotnie, zauważamy najpierw że

$$r > s > 0 \Rightarrow r^2 > rs > s^2 \Rightarrow r^2 > s^2.$$

Zatem $r^2 \leq s^2 \Rightarrow (r \leq s \text{ lub } s \leq 0)$.

$$\text{Stąd } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Z drugiej strony, $\operatorname{Re} z \leq |z| \Rightarrow$

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 +$$

$$z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2$$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1 \bar{z}_2| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2|$$

$$= (|z_1| + |z_2|)^2. \text{ To udowadnia że}$$

$$\boxed{\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$$

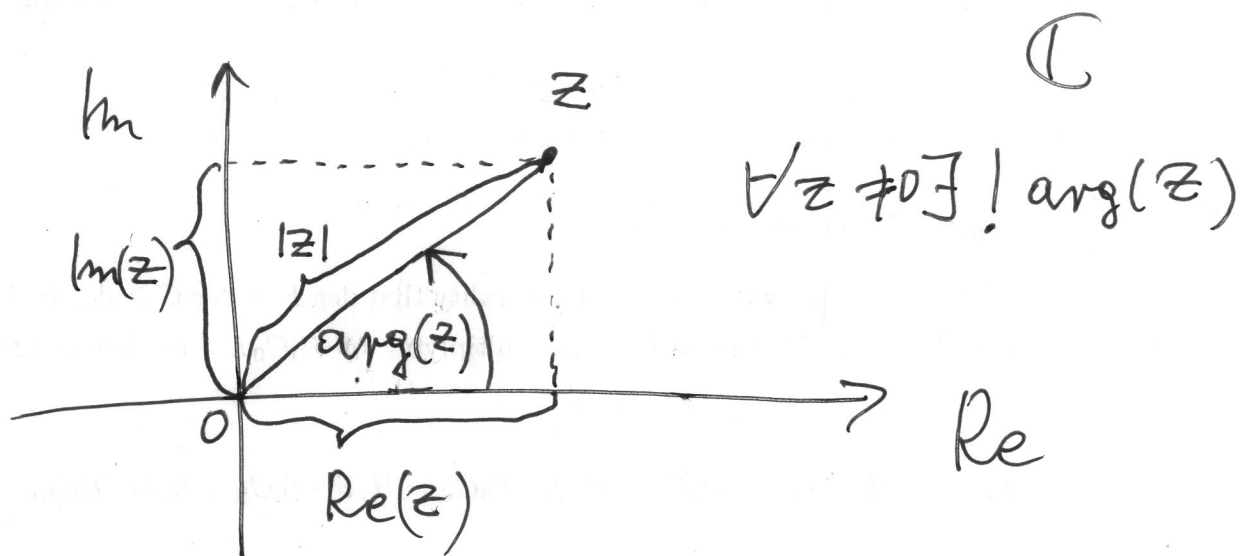
$$\text{Stąd } |z_1| = |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|,$$

$$|z_2| = |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_1|.$$

$$\text{Czyli } |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \text{ i } |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|,$$

$$\text{tzn. } ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

Postać trygonometryczna liczb zespolonych:



$$\cos(\arg(z)) := \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|} = \frac{z + \bar{z}}{2\sqrt{z\bar{z}}}$$

$$\sin(\arg(z)) := \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|} = \frac{z - \bar{z}}{2i\sqrt{z\bar{z}}}$$

$$\arg(z) := \begin{cases} \arccos \frac{z + \bar{z}}{2\sqrt{z\bar{z}}} & \text{dla } \operatorname{Im}(z) \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{z + \bar{z}}{2\sqrt{z\bar{z}}} & \text{dla } \operatorname{Im}(z) < 0 \end{cases}$$

m
 $[0, 2\pi[$

$$z = |z| (\cos(\arg(z)) + i \sin(\arg(z)))$$

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| (\cos(\arg(z_1)) + i \sin(\arg(z_1))) \cdot (\cos(\arg(z_2)) + i \sin(\arg(z_2)))$$

$$= |z_1 z_2| (\cos(\arg(z_1) + \arg(z_2)) + i \sin(\arg(z_1) + \arg(z_2)))$$

Wniosekujemy stąd że $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$$

Wniosekujemy również wzór de Moivre'a:

$$z^n = |z|^n (\cos(n \arg(z)) + i \sin(n \arg(z)))$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$e^{i\varphi} := \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Uwaga: Wiedząc z analizy że

$$\text{szereg } e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

jest zbieżny i pamiętając o rozwinięciu sinusa i

cosinusa w szeregu Taylora, powyższe

oznaczenie staje się słynnym wzorem Eulera:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \end{aligned}$$

Po przedstawieniu liczb zespolonych w postaci biegunowej $z = |z| e^{i \arg(z)}$, mnożenie

ma wygodną prostą postać:

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\arg(z_1) + \arg(z_2))}.$$

Tenż od razu widać że mnożenie liczb zespolonych jest łączne i przemienne oraz że $z^{-1} = |z|^{-1} e^{-i \arg(z)}$.

Twierdzenie: $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, n \in \mathbb{N}$:

istnieje dokładnie n różnych liczb zespolonych $z_k := \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg(z) + 2\pi k}{n}}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, takich że $z_k^n = z$.

Dowód: Ze wzoru de Moivre'a, $w^n = z \Rightarrow$

$$(|w| = \sqrt[n]{|z|} \text{ i } \arg(w) \equiv \frac{\arg(z) + 2\pi k}{n} \pmod{2\pi}, k \in \mathbb{Z}).$$

Pozostaje zauważyć że $\arg(w) \neq \arg(w') \Rightarrow$

$w \neq w'$ oraz że różnicanie na $\arg(w)$ ma dokładnie n różnych rozciągania dla $k \in \{0, \dots, n-1\}$. ■

Liczby $e^{\frac{2\pi i k}{n}}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, nazywamy n -tymi pierwiastkami z 1.