

OD WZORÓW CARDANO DO ZASADNICZEGO TWIERDZENIA ALGEBRY

① Jak rozstrzygać równania

$$z^3 + az^2 + bz + c = 0,$$

$$z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0,$$

w $\mathbb{C}$?

② Dlaczego nie można podać ogólnego
rozstrzygnięcia równania

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

dla $n \geq 5$?

③ Czy zawsze istnieje zespolone
rozstrzygnięcie równania

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0?$$

Ogólne spostrzeżenie: W równaniu

$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ bez straty ogólności
możemy założyć że $a_{n-1} = 0$ bo człon
 $a_{n-1}z^{n-1}$ można zawsze wyeliminować przez

podstawienie $w := z + \frac{a_{n-1}}{n}$:

$$\begin{aligned} & \left(w - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^n + a_{n-1} \left(w - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-1} + a_{n-2} \left(w - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-2} + \dots + a_0 \\ &= w^n + \boxed{n w^{n-1} \left(\frac{-a_{n-1}}{n}\right)} + \dots + \left(\frac{-a_{n-1}}{n}\right)^n \\ & \quad + \boxed{a_{n-1} w^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{-a_{n-1}}{n}\right)^{n-1} \\ & \quad + a_{n-2} \left(w - \frac{a_{n-1}}{n}\right)^{n-2} + \dots + a_0 \\ &= w^n + b_{n-2} w^{n-2} + \dots + b_0. \end{aligned}$$

Wzory Cardano: Szukamy ogólnego rozwiązania równania $z^3 + p z + q = 0$. Zakładamy że $p \neq 0$, bo inaczej rozwiązanie jest natychmiastowe. Podstawiając

$z = t + \alpha t^{-1}$, $\alpha \neq 0$, otrzymujemy

$$z^3 + p z + q = t^3 + 3t^2 \alpha t^{-1} + 3t \alpha^2 t^{-2} + \alpha^3 t^{-3}$$

+ $p t + p \alpha t^{-1} + q$. Wkładając $\alpha = -\frac{p}{3}$ dostajemy

$$t^3 - \frac{p^3}{27} t^{-3} + q = 0. \text{ Stąd } t^3 \text{ jest rozwiązaniem}$$

równania $w^2 + qw - \frac{p}{27} = 0$, czyli jest postaci

$$w_+ := \frac{1}{2} \left(-q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \right) = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$\text{lub } w_- := -q - w_+ = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

$$\text{Z drugiej strony, } t^3 + \left(\frac{-p}{3t}\right)^3 = -q.$$

$$\text{Zestawiając to z równością } w_+ + w_- = -q$$

$$\text{otrzymujemy } t^3 = w_+ \Rightarrow \left(\frac{-p}{3t}\right)^3 = w_-$$

$$\Rightarrow w_- = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 \frac{1}{w_+}. \text{ Teraz niech}$$

$\sqrt[3]{w_+}$ będzie którymś z 3 pierwiastków w_+ .

Wtedy pozostałe pierwiastki są postaci

$$\sqrt[3]{w_+} \varepsilon, \sqrt[3]{w_+} \varepsilon^2, \varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{3}}. \text{ Zatem a priori}$$

$$\text{mamy że 6 rozwiązań ma } z = t - \frac{p}{3t} \in$$

$$\left\{ \sqrt[3]{w_+} - \frac{p}{3\sqrt[3]{w_+}}, \sqrt[3]{w_+} \varepsilon - \frac{p \varepsilon^{-1}}{3\sqrt[3]{w_+}}, \sqrt[3]{w_+} \varepsilon^2 - \frac{p \varepsilon^{-2}}{3\sqrt[3]{w_+}} \right\} =$$
$$\left\{ \sqrt[3]{w_+} \varepsilon^k - \frac{p \varepsilon^{-k}}{3\sqrt[3]{w_+}} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}.$$

$$\text{Ale } z \sqrt[3]{w_-} = \frac{-P \varepsilon^L}{3 \sqrt[3]{w_+}}, \quad L \in \{0, 1, 2\},$$

Wynika że

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{w_-} \varepsilon^k - \frac{P \varepsilon^{-k}}{3 \sqrt[3]{w_-}} &= - \frac{P \varepsilon^{k+L}}{3 \sqrt[3]{w_+}} - \frac{P \varepsilon^{-k}}{3 \left(\frac{-P \varepsilon^L}{3 \sqrt[3]{w_+}} \right)} \\ &= \sqrt[3]{w_+} \varepsilon^{-(k+L)} - \frac{P \varepsilon^{k+L}}{3 \sqrt[3]{w_+}}, \quad k, L \in \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

Stąd w_- daje takie same rozwiązania jak w_+ i możemy je pominąć. Ostatecznie otrzymujemy wzory Cardano:

Twierdzenie: Rozwiązaniami równania

$$z^3 + p z + q = 0, \quad p \neq 0, \quad \text{są } z_0 := \sqrt[3]{w} - \frac{p}{3 \sqrt[3]{w}},$$

$$z_1 := \sqrt[3]{w} \varepsilon - \frac{p \varepsilon^2}{3 \sqrt[3]{w}}, \quad z_2 := \sqrt[3]{w} \varepsilon^2 - \frac{p \varepsilon}{3 \sqrt[3]{w}}, \quad \text{gdzie}$$

$$w := -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Równania stopnia czwartego: $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

Znow zakładamy że człon liniowy nie
znika ($q \neq 0$), bo inaczej równanie rozwią-
zuje się natychmiastowo. Zauważmy że $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:
$$z^4 + pz^2 + qz + r = \left(z^2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - \left((\lambda - p)z^2 - qz + \left(\frac{\lambda^2}{4} - r\right)\right)$$

Jeśli λ jest jakimkolwiek rozwiązaniem
równania 3-go stopnia $q^2 - 4(\lambda - p)\left(\frac{\lambda^2}{4} - r\right) = 0$,
to $\lambda \neq p$ oraz $(\lambda - p)z^2 - qz + \frac{\lambda^2}{4} - r =$

$$= (\lambda - p) \left(z - \frac{q}{2(\lambda - p)}\right)^2 = \left(\sqrt{\lambda - p} z - \frac{q}{2\sqrt{\lambda - p}}\right)^2.$$

Zatem $z^4 + pz^2 + qz + r =$

$$\left(z^2 + \sqrt{\lambda - p} z + \frac{\lambda}{2} - \frac{q}{2\sqrt{\lambda - p}}\right) \left(z^2 - \sqrt{\lambda - p} z + \frac{\lambda}{2} + \frac{q}{2\sqrt{\lambda - p}}\right).$$

Ostatecznie otrzymujemy

Twierdzenie: Jeśli λ jest jakimkolwiek
rozwiązaniem równania $q^2 = (\lambda - p)(\lambda^2 - 4r)$, to

$\forall q \neq 0$ rozwiązania równania kwadratowego

$$z^2 \pm \sqrt{\lambda - p} z + \frac{\lambda}{2} \mp \frac{q}{2\sqrt{\lambda - p}} = 0$$
 są rozwiązaniami

równania $z^4 + pz^2 + qz + r = 0$.

Twierdzenie: Dla $n \geq 5$ nie jest możliwe otrzymanie ogólnego rozwiązania równania $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ jako funkcji od współczynników $a_0, \dots, a_{n-1}$ uzyskanej przy pomocy stałych ułamków oraz skończonej ilości operacji algebraicznych (dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia) i skończonej ilości operacji pierwiastkowania.

Zasadnicze Twierdzenie Algebry: Dla $n \geq 1$

każde równanie $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ o współczynnikach zespolonych $a_0, \dots, a_{n-1}$ posiada rozwiązanie w ciele liczb zespolonych $\mathbb{C}$. Innymi słowy, cielo liczb zespolonych jest algebraicznie domknięte.

Uwaga: Istnieje mnóstwo elementarnych niealgebraicznych dowodów Zasadniczego Twierdzenia Algebry.