

CIĄGI DOKŁADNE, PRODUKTY I SUMY PROSTE

Niech R będzie dowolnym pierścieniem.

Ciąg odwzorowań liniowych pomiędzy R -modułami

$$\dots M_{-2} \xrightarrow{f_{-2}} M_{-1} \xrightarrow{f_{-1}} M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \rightarrow \dots$$

nazywamy dokładnym $\Leftrightarrow$

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \operatorname{Ker} f_{n+1} = \operatorname{Im} f_n$$

Zauważamy że $\forall n \in \mathbb{Z} : f_{n+1} \circ f_n = 0$.

Szczególne ważne są krótkie ciągi dokładne

$$0 \rightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \rightarrow 0.$$

Tutaj dokładność oznacza że:

- ① $\operatorname{Ker} f_0 = 0$ (f_0 jest iniekcją),
- ② $\operatorname{Coker} f_1 = 0$ (f_1 jest surjekcją),
- ③ $\operatorname{Im} f_0 = \operatorname{Ker} f_1$.

Przykład ciągu dokładnego grup abelowych
($\mathbb{Z}$ -modułów): $0 \rightarrow n\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0.$

Twierdzenie: Jeśli $0 \rightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \rightarrow 0$
 jest ciągiem dokładnym, to

$$M_2 \cong \text{Coker } f_0 = M_1 / \text{Im } f_0$$

Dowód: Odwzorowanie liniowe f_1 indukuje
 odwzorowanie liniowe

$$M_1 / \text{Im } f_0 \ni [m] \xrightarrow{\tilde{f}_1} f_1(m) \in M_2.$$

Jest dobrze zdefiniowane bo $\text{Im } f_0 \subseteq \text{Ker } f_1$.
 Jest automatycznie liniowe i surjekttywne.
 Wreszcie jest iniektywne bo $\tilde{f}_1([m]) = 0$

$$\Leftrightarrow f_1(m) = 0 \Leftrightarrow m \in \text{Ker } f_1 = \text{Im } f_0$$

$$\Leftrightarrow [m] = 0. \quad \blacksquare$$

Mówimy że odwzorowanie liniowe

$$M \xrightarrow{f} N \text{ rozszerza się } \Leftrightarrow$$

$$\exists \text{ odwzorowanie liniowe } N \xrightarrow{s} M: f \circ s = \text{id}.$$

Odwzorowanie s nazywamy rozszerzeniem
 lub retrakcją odwzorowania f .

Oduzorowanie rozszczepiane f musi być sur-
jeksią, bo w przeciwnym razie $\exists n \notin \text{Im } f \supseteq \text{Im}(f \circ s) \Rightarrow$

$\exists n \notin \text{Im } \text{id} = N$, co jest niemożliwe.

Podobnie, oduzorowanie rozszczepiające
 s musi być injekcją, bo $\text{Ker } s \subseteq \text{Ker}(f \circ s) =$
 $= \text{Ker}(\text{id}) = 0$. Zatem oduzorowanie

$s \circ f$ ma własność (idempotentną):

$$(s \circ f)^2 := s \circ \underbrace{f \circ s} \circ f = s \circ \text{id} \circ f = s \circ f.$$

Definicja "potentów": Niech R będzie
dowolnym pierścieniem. Element
 $r \in R$ nazywamy:

① idempotentem $\Leftrightarrow r^2 = r$,

② unipotentem $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : r^n = 1$,

③ nilpotentem $\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : r^n = 0$.

Zbiór wszystkich oduzorowań liniowych
z M do N oznaczamy przez $\text{Hom}_R(M, N)$. Jest
grupa abelowa ze względu na punktowe dodawanie $+$. Jeśli $M=N$,
to $\text{Hom}_R(M, M)$ jest pierścieniem ze względu na $+$ i $\circ$. Tak więc $s \circ f$
jest idempotentem w $\text{Hom}_R(M, M)$.
Przykład: Kanoniczna surjeksja $\mathbb{Z}$ -modułów $\mathbb{Z} \ni m \mapsto [m] \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
nie rozszczepia się. Istotnie, jeśli $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \xrightarrow{s} \mathbb{Z}$ jest
 $\mathbb{Z}$ -liniowe, to $n \cdot s([1]) = s([n]) = s(0) = 0 \Rightarrow s([1]) = 0 \Leftrightarrow s = 0$.

Niech R będzie dowolnym pierścieniem,
 M dowolnym R -modulem, a N_1 i N_2
dowolnymi podmodułami M . Sumą pod-
modułów N_1 i N_2 nazywamy podmoduł

$$N_1 + N_2 := \{m + n \in M \mid m \in N_1, n \in N_2\}$$

Jeśli $N_1 \cap N_2 = \{0\} = 0$, to sumę $N_1 + N_2$
nazywamy sumą prostą i oznaczamy
przez $N_1 \oplus N_2$.

Twierdzenie: Niech $0 \rightarrow M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \rightarrow 0$

będzie ciągiem dokładnym. Wtedy nastę-
pujące warunki są równoważne:

- ① $\exists s_1 \in \text{Hom}_R(M_2, M_1) : f_1 \circ s_1 = \text{id}$ (f_1 roz-
szczepia się),
- ② $\exists p_0 \in \text{Hom}_R(M_1, M_0) : p_0 \circ f_0 = \text{id}$ (f_0 roz-
szczepia p_0),
- ③ $\exists$ podmoduł M_1' : $M_1 = \text{Ker } f_1 \oplus M_1' = \text{Im } f_0 \oplus M_1'$.

Dowód: ① $\Rightarrow$ ③: $\forall x \in M_1 : x = s_1(f_1(x)) + x - s_1(f_1(x))$
 $\in \text{Im } s_1 + \text{Ker } f_1$. Stąd $M_1 = \text{Im } s_1 + \text{Ker } f_1$. Ta

suma jest prosta bo $x \in \text{Im } S_1 \cap \text{Ker } f_1 \Rightarrow$
 $\exists y \in M_2 : x = S_1(y) \text{ i } f_1(x) = (f_1 \circ S_1)(y) = y = 0.$

Zatem $x = S_1(0) = 0$, skąd $\text{Im } S_1 \cap \text{Ker } f_1 = \{0\} = 0.$

Lemat: Niech $N = N_1 \oplus N_2$. Wtedy

$\exists p_k \in \text{Hom}_R(N_1, N_k) : p_k \circ i_k = \text{id}$, gdzie
 $i_k \in \text{Hom}_R(N_k, N)$ jest włożeniem, $k \in \{1, 2\}.$

Dowód lematu: Jeśli $n_1, n'_1 \in N_1, n_2, n'_2 \in N_2$,
 to $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2 \Leftrightarrow (n_1 = n'_1 \text{ i } n_2 = n'_2).$

Istotnie, $n_1 + n_2 = n'_1 + n'_2 \Leftrightarrow n_1 - n'_1 = n'_2 - n_2 \in$

$N_1 \cap N_2 = 0$. Zatem rozkład dekad-

nego $n \in N$ na sumę elementów z N_1 i N_2
 jest jednoznaczny, i możemy zdefiniować
 odzorowania $p_k \in \text{Hom}(N, N_k), k \in \{1, 2\}$, przez

wzory $p_k(n) := n_k \Leftrightarrow \exists n_{k'} \in N_{k'}, k' \neq k : n = n_k + n_{k'}$.

Linijność odzorowań p_k wynika z tego że
 N_k są modułami oraz z implikacji

$$\left. \begin{array}{l} n = n_k + n_{k_1} \\ m = m_k + m_{k_1} \\ r \in R \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m + n = \underbrace{m_k + n_k}_{\in N_k} + \underbrace{m_{k_1} + n_{k_1}}_{\in N_{k_1}} \\ r n = \underbrace{r n_k}_{\in N_k} + \underbrace{r n_{k_1}}_{\in N_{k_1}} \end{array} \right.$$

Wreszcie $p_k \circ i_k = \text{id}$, $k \in \{1, 2\}$, wynika stąd że $\forall n_k \in N_k : n_k = n_k + 0 \in N$. $\square$

③ $\Rightarrow$ ① Niech $p_1 \in \text{Hom}(M_1, \text{Ker } f_1)$ będzie lematowym rozłożeniem na składniki proste $\text{Ker } f_1$. $\forall m \in M_2 \exists \tilde{m} \in M_1 : f_1(\tilde{m}) = m$.

Odwzorowanie $M_2 \ni m \xrightarrow{s_1} \tilde{m} - p_1(\tilde{m}) \in M_1$ jest

dobrze zdefiniowane bo $\tilde{m} \in \text{Ker } f_1 \Rightarrow \tilde{m} - p_1(\tilde{m}) = \tilde{m} - \tilde{m} = 0$. Linijność s_1 jest evidentna, więc

$$\forall m \in M_1 : f_1(s_1(m)) = f_1(\tilde{m}) - f_1(p_1(\tilde{m})) = f_1(\tilde{m}) = m$$

konczy dowód. ① $\Leftrightarrow$ ③ udowodnione jest podobnie.

Niech M_i , $i \in I$, będzie dowolną niepustą rodziną R -modułów. Wtedy produkt modułów

$$\prod_{i \in I} M_i := \{ f \in \text{Map}(I, \bigcup_{i \in I} M_i) \mid \forall i \in I : f(i) \in M_i \}$$

jest

R -modulem ze względu na działania punktowe.

Sumą prostą $\bigoplus_{i \in I} M_i$ jest podmoduł $\prod_{i \in I} M_i$

wszystkich funkcji zerujących się wszędzie poza skończoną ilością elementów I . Utworzenia-

jąc $M_i \cong \{ f \in \prod_{k \in I} M_k \mid \forall k \neq i : f(k) = 0 \}$ widzimy że

$\forall i \neq j : M_i \cap M_j = 0$, co daje zgodność z poprzednią definicją sumy prostej. Jeśli I jest skończony, to $\prod_{i \in I} M_i = \bigoplus_{i \in I} M_i$.