Algebra z geometrią I

Kolokwium nr 1, 3 XII 2012 r.

Instrukcje: *Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi kolokwium jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z kolokwium. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chlujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu:* **nr zadania, imię, środkowy inicjał i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. *Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.*

Zadanie 1. Zdefiniuj permutację i znak permutacji (2 punkty). Dwie permutacje σ i ρ na zbiorze $\{1,\ldots,10\}$ zadane są w postaci tabelarycznej jako

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 6 & 5 & 2 & 8 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 6 & 2 & 8 & 3 & 7 & 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Oblicz $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$, $\rho^2 = \rho \circ \rho$ oraz $\tau = \rho \circ \sigma$ (3 punkty).

b) Rozłóż $\rho \circ \sigma$ na cykle rozłączne, transpozycje i oblicz znak $\operatorname{sign}(\tau)$ (3 punkty).

c) Oblicz τ^7 (2 punkty).

Zadanie 2. Jakie warunki musi spełniać półgrupa żeby była grupą (2 punkty)? Dany jest zbiór

$$G = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| = 1\}.$$

Sprawdź że formuła

$$\forall\, z, w \in G:\ z \bullet w := \frac{\bar{z} - w}{\bar{z} - 1} \in \mathbb{C}$$

określa łaczne działanie na tym zbiorze (2 punkty).

a) Naszkicuj G na płaszczyźnie zespolonej (1 punkt).

b) Sprawdź że $(G, \bullet)$ jest grupą przemienną (5 punktów).

Zadanie 3. Jaki warunek musi spełniać podpierścień ciała żeby być ciałem (1 punkt)? Podaj przykład podpierścienia ciała $\mathbb{C}$ który nie jest ciałem ani podpierścieniem $\mathbb{R}$ (1 punkt). Udowodnij że każdy podpierścień ciała $\mathbb{C}$ jest nieskończony (1 punkt). Niech

$$X := \left\{ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} :\ \frac{z^3}{\bar{z}^3} = 1 \right\}.$$

a) Opisz elementy zbioru X i naszkicuj zbiór X na płaszczyźnie (4 punkty).

b) Sprawdź że jeśli $z_1 \in X$, $z_2 \in X$ to także ich iloczyn jest elementem tego zbioru: $z_1 \cdot z_2 \in X$ (1 punkt).

c) Udowodnij że $(X, \cdot)$ jest grupą (1 punkt).

d) Udowodnij że $(X, \cdot, +)$ nie jest pierścieniem (1 punkt).

Zadanie 4. Udowodnij że pierścień wielomianów $\mathbb{C}[\mathbb{N}]$ jest izomorficzny z pierścieniem zespolonych funkcji wielomianowych (4 punkty). Znajdź wszystkie rozwiązania zespolone równania (6 punktów)

$$z^3 + 9z + 6 = 0\,.$$