

Algebra z geometrią II (2012/13)

Kolokwium pisemne, 22 kwietnia 2013 r.

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi kolokwium jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z kolokwium. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Zadanie 1. Udowodnij że zbiór wszystkich rozwiązań jakiegokolwiek układu równań liniowych nad $\mathbb{Q}$ nie może być 2013-elementowy (3 punkty). W zależności od parametru $p \in \mathbb{Q}$, rozwiąż układ równań (7 punktów)

$$\begin{cases} -x + (1+p)y + (1+p)z = 1 \\ -px + (3+p)y + 2z = 1 \\ x + 2y + (3+p)z = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 2. Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k , $\dim(V) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Udowodnij że, jeśli choć jeden z endomorfizmów $f, g \in \text{End}_k(V)$ jest bijekcją, to

$$\text{spec}_{\text{End}_k(V)}(f \circ g) = \text{spec}_{\text{End}_k(V)}(g \circ f) \quad (3 \text{ punkty}).$$

Przypomnijmy że przestrzeń własna endomorfizmu f dla wartości własnej λ to

$$V_\lambda := \bigcup_{j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \ker(f - \lambda \text{id})^j.$$

W zależności od wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, znajdź wartości, wektory i przestrzenie własne endomorfizmu $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^3)$ którego macierz w bazie kanonicznej to

$$F := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \quad (5 \text{ punktów}).$$

Dla jakich wartości parametrów a, b endomorfizm f jest diagonalizowalny (2 punkty)?

Zadanie 3. Podaj przykład zespolonego szeregu potęgowego f i niediagonalnej macierzy $M \in M_2(\mathbb{C})$ takich że nie istnieje $f(M)$ (4 punkty). Oblicz e^A , gdzie

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}) \quad (6 \text{ punktów}).$$

Zadanie 4. Niech $f: M \rightarrow N$ będzie dowolnym surjektywnym odwzorowaniem liniowym. Udowodnij że odwzorowanie transponowane $f^T: N^* \rightarrow M^*$ jest injektywne (1 punkt). Niech $V := \mathbb{R}_2[x]$ będzie przestrzenią rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2. Pokaż że funkcjonały liniowe $\omega^i \in V^*$ ($i = 0, 1, 2$) określone wzorem

$$\omega^i(v) = v'(i) - v(i), \quad v \in V,$$

tworzą bazę przestrzeni V^* (4 punkty). Znajdź bazę E przestrzeni V do której $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ jest bazą dualną (3 punkty). Oblicz macierz endomorfizmu $f \in \text{End}(V)$ danego wzorem $(f(v))(x) = v'(x) + v(x)$ w bazie E oraz macierz endomorfizmu transponowanego $f^T \in \text{End}(V^*)$ w bazie $\{\omega^1, \omega^2, \omega^3\}$ (2 punkty).