

Algebra z geometrią I

Kolokwium próbne, 26 XI 2012 r.

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi kolokwium jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisanja i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z kolokwium. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię, środkowy inicjał i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Zadanie 1. (Permutacje.) Zdefiniuj permutację i znak permutacji (2 punkty). Sprawdź że formuła

$$\sigma(k) = \frac{|4k - 33| + 1}{2}$$

określa permutację zbioru $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ (2 punkty).

a) Znajdź rozkład tej permutacji na cykle (2 punkty).

b) Znajdź znak σ : $\text{sign } \sigma$ (2 punkty).

c) Oblicz σ^5 (2 punkty).

Zadanie 2. (Ogólne własności grup, pierścieni i ciał.) Ile elementów ma Twoje ulubione ciało skończone (1 punkt)? Zdefiniuj charakterystykę ciała (1 punkt). Udowodnij że ciało czteroelementowe musi mieć charakterystykę 2 (3 punkty). Niech $(K, +, \cdot)$ będzie 4-elementowym ciałem, gdzie $K = \{0, 1, a, b\}$, przy czym 0 jest elementem neutralnym ze względu na dodawanie '+', zaś '1' jest elementem neutralnym ze względu na mnożenie '·'. Uzupełnij tabelki tych działań (4 punkty):

+	0	1	a	b
0				
1		0		
a				
b				0

·	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

Oblicz $a \cdot (1 + b)$ (1 punkt).

Zadanie 3. (Liczby zespolone.) Zdefiniuj symbol e^{it} (2 punkty). Korzystając z Zasadniczego Twierdzenia Algebry, udowodnij że zespolony wielomian $\alpha \in \mathbb{C}[N]$ stopnia n , $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, jest zawsze postaci $\alpha = \alpha(n)(x - z_1) \cdots (x - z_n)$, $\alpha(n) \neq 0$, $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (3 punkty). Następnie wykaż że (5 punktów)

$$(1 - \varepsilon) \cdots (1 - \varepsilon^{n-1}) = n, \quad \text{gdzie } \varepsilon := e^{\frac{2\pi i}{n}}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}.$$

Zadanie 4. (Wielomiany jednej zmiennej nad ciałem liczb zespolonych.) Podaj pierwsze imię Cardano (0 punktów). Udowodnij że pierścień wielomianów $\mathbb{C}[N]$ jest izomorficzny z pierścieniem zespolonych funkcji wielomianowych (4 punkty). Znajdź wszystkie zespolone pierwiastki wielomianu (6 punktów)

$$z^3 + 24z^2 - 648.$$