Algebra z geometrią I
semestr zimowy 2012/2013

Egzamin próbny

17 stycznia 2013 r.

Instrukcje: *Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi kolokwium jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z kolokwium. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chlujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu:* **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. *Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.*

Zadanie 1. Odwzorowania liniowe (jądra, obrazy, kojądra): Udowodnij że odwzorowanie liniowe f jest surjekcją wtedy i tylko wtedy gdy $\operatorname{coker} f = 0$ (1 punkt). Niech F będzie określone na rzeczywistych funkcjach wielomianowych których stopień nie jest większy niż 3 przez wzór

$$\mathbb{R}_3[x] \ni P \longmapsto F(P) = \begin{pmatrix} 3\int_0^2 P(x)\,dx \\ P(1) \\ P'(2) - P'(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

a) Sprawdź że odwzorowanie F jest liniowe (2 punkty).

b) Podaj bazę jądra $\ker F$ (3 punkty).

c) Podaj bazę obrazu $\operatorname{im} F$ (3 punkty).

d) Oblicz wymiar kojądra $\operatorname{coker} F$ (1 punkt).

Zadanie 2. Macierze odwzorowań linowych (skończone ale niekoniecznie kwadratowe): Czy rozmiar macierzy odwzorowania liniowego nad ciałem o charakterystyce 13 może zależec od wyboru bazy (1 punkt)? W bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $f_k\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ to

$$F_k := \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} .$$

Znajdź macierz odwzorowania f_k w bazie

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{(3 punkty).}$$

Dla jakich $k \in \mathbb{R}$ zbiór

$$G_k := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, F_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

jest zbiorem jednoelementowym i jaki to wtedy element (6 punktów)?

Zadanie 3. Bazy i wymiar (skończone): Niech V będzie skończeniewymiarową przestrzenią wektorową. Korzystając z faktu że dla dowolnego $f \in \mathrm{End}(V) : V \cong \ker f \oplus \mathrm{im} f$, udowodnij że

$$\forall\, f \in \mathrm{End}(V) : \dim \ker f = \dim \mathrm{coker} f \quad \text{(2 punkty).}$$

Dane są cztery wektory w $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Niech $V = \mathrm{span}\{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$ oraz $U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

a) Znaleźć wymiary przestrzeni V, U, $U+V$ oraz $V \cap U$ (4 punkty).

b) Podać bazy V i U takie, aby ich część wspólna była bazą $V \cap U$ (3 punkty).

c) Zbadać czy $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V + U$ (1 punkt).

Zadanie 4. Liniowa niezależność i span (skończone układy): Niech $B \subset \mathbb{R}^4$ bedzie zbiorem 4 wektorów. Czy B musi być zbiorem linowo niezależnym jesli każdy 3-elementowy podzbiór B jest liniowo niezależny (4 punkty)?

$$\mathbb{R}^4 \supset W = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ u \\ 12 \\ u+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dla jakich $u \in \mathbb{R}$ można podrzestrzeń W opisać jednym równaniem liniowym (6 punktów)?

Zadanie 5. Ślady (dowolne skończone) i wyznaczniki (tylko elementarne): Niech $\{A_1, \dots, A_n\}$ będzie zbiorem macierzy. Podaj n różnych permutacji $\sigma \in S_n$ dla których

$$\mathrm{tr}(A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}) = \mathrm{tr}(A_1 \dots A_n) \quad \text{(1 punkt).}$$

Podaj przykład macierzy i permutacji dla których powyższa równość nie jest spełniona (2 punkty). Dane są wektory w $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oraz permutacja zadana wzorem $\sigma(i) = (3i \bmod 4) + 1$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Znajdź w bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ przekształcającego v_i na i-ty wektor bazy standardowej (1 punkt).

b) Znajdź w bazie standardowej macierz odwzorowania liniowego $M : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : v_i \mapsto v_{\sigma(i)}$ (2 punkty).

c) Oblicz ślady i wyznaczniki odwzorowań liniowych M i B (4 punkty).