

Algebra z geometrią II (2012/13)

Kolokwium próbne, 15 kwietnia 2013 r.

Instrukcje: Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi kolokwium jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisania i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z kolokwium. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłówku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

Zadanie 1. (Odwracanie macierzy i rozwiązywanie układów równań liniowych.) Udowodnij że układ równań liniowych nad $\mathbb{R}$ nie może mieć przeliczalnie nieskończonej ilości różnych rozwiązań (3 punkty). W zależności od parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, rozwiąż układ równań (7 punktów)

$$\begin{cases} (\alpha + 2)x + y + 2z = \alpha \\ (\alpha - 1)x + (\alpha - 2)y + z = \alpha - 2 \\ 3\alpha x + (\alpha - 1)y + (\alpha + 2)z = 2\alpha - 2 \end{cases}.$$

Zadanie 2. (Spektrum, wartości i wektory własne.) Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem k , $\dim(V) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Udowodnij że każdy element $\text{spec}_{\text{End}_k(V)}(f)$ ma niezerowy wektor własny (3 punkty). Niech $V := \mathbb{R}_2[t]$ będzie przestrzenią wektorową rzeczywistych funkcji wielomianowych nie posiadających stopnia większego niż 2, a $A := \text{End}(V)$ rzeczywistą algebrą endomorfizmów V . Zdefiniujmy

$$f: V \ni v \mapsto f(v) \in V, \quad \forall v \in V: (f(v))(t) := v(2 - t).$$

- i) Sprawdź że $f \in \text{End}(V)$ (1 punkt).
- ii) Oblicz wielomian charakterystyczny f i $\text{spec}_A(f)$ (3 punkty).
- iii) Pokaż że endomorfizm f jest diagonalizowalny i przedstaw funkcję wielomianową daną wzorem $w(t) = t^2$ jako kombinację wektorów własnych f (3 punkty).

Zadanie 3. (Podprzestrzeń własna i szeregi potęgowe endomorfizmów.) Niech k będzie niezerowym pierścieniem przemiennym. Udowodnij że macierz $F \in M_n(k)$ jest diagonalizowalna wtedy i tylko wtedy gdy k^n posiada bazę złożoną z wektorów własnych F (2 punkty). Podaj przykład macierzy $F \in M_2(\mathbb{Z})$ która nie jest ani nilpotentna ani diagonalizowalna (2 punkty). Znajdź wszystkie wartości $a \in \mathbb{R}$ dla których spełniony jest warunek (6 punktów)

$$\exp \left[a \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4. (Przestrzenie i bazy dualne oraz odwzorowania transponowane.) Niech R będzie dowolnym pierścieniem. Udowodnij że $(\bigoplus_{\mathbb{N}} R)^* = \prod_{\mathbb{N}} R$ (1 punkt). Niech

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4) \quad \text{oraz} \quad V_1 := \text{Im } T, \quad V_2 := \ker T.$$

Pokaż że $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ (4 punkty). W bazie kanonicznej oblicz macierz rzutu na V_1 wzdłuż V_2 (5 punktów).