

# Algebra z geometrią 2012/2013

Egzamin próbny, 3 VI 2013 r.

**Instrukcje:** Każde zadanie jest za 10 punktów. Praca nad rozwiązaniami musi być absolutnie samodzielna. Jakakolwiek forma komunikacji z kimkolwiek poza pilnującymi egzamin jest całkowicie zakazana. Zabronione jest też korzystanie z czegokolwiek poza przyborami do pisanie i czystymi kartkami papieru formatu A4. Wszelkie oszustwa lub ich próby skutkować będą usunięciem z egzaminu. Rozwiązanie każdego zadania musi znajdować się na osobnej kartce (lub niepustym zbiorze kartek) formatu A4 oraz być napisane chłujnie i czytelnie. W nagłóiku każdego rozwiązania muszą znajdować się dane wypełnione DRUKOWANYMI literami i liczbami w systemie dziesiętnym według schematu: **nr zadania, imię i nazwisko, nr indeksu, nazwisko prowadzącego ćwiczenia**. Najmniejsze nawet odstępstwo od tych instrukcji w którymkolwiek z zadań skutkować będzie utratą 1 punktu w tym zadaniu.

**Zadanie 1. Formy biliniowe i kwadratowe:** Udowodnij że, jeżeli  $A \in M_2(\mathbb{R})$  jest macierzą rzeczywistej formy kwadratowej, to jest ona diagonalizowalna jako macierz endomorfizmu  $a \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$  (4 punkty). Niech  $Q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  będzie formą kwadratową określoną w następujący sposób:

$$Q(\mathbf{v}) = 3\lambda x^2 + 2\lambda y^2 + \lambda z^2 + \lambda^2 t^2 - 4xy - 2\lambda xz, \quad \mathbf{v} = (x, y, z, t)^T \in \mathbb{R}^4, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sprowadź  $Q$  do postaci kanonicznej oraz znajdź wszystkie wartości parametru  $\lambda$  dla których forma  $Q$  jest dodatnio określona (2 punkty), oraz wszystkie wartości parametru  $\lambda$  dla których jest ona zdegenerowana (2 punkty). Wyznacz sygnaturę  $Q$  dla  $\lambda = -2$  oraz  $\lambda = 0$  (2 punkty).

**Zadanie 2. Norma, iloczyn skalarny, bazy ortonormalne:** Udowodnij że macierz przejścia z bazy ortonormalnej do bazy ortonormalnej jest unitarna (4 punkty). Sprawdź że, w przestrzeni  $\mathbb{C}_2[x]$  wszystkich funkcji wielomianowych z  $\mathbb{R}$  w  $\mathbb{C}$  nie posiadających stopnia nie większego od 2, odwzorowanie

$$\mathbb{C}_2[x] \times \mathbb{C}_2[x] \ni \langle v|w \rangle \mapsto \langle v|w \rangle := 6 \int_{-1}^1 t^2 \overline{v(t)} w(t) dt \in \mathbb{C}$$

jest iloczynem skalarnym (3 punkty). Zortonormalizuj względem tego iloczynu skalarnego bazę  $\{u_i\}_1^3$ , gdzie  $u_1(x) := 1$ ,  $u_2(x) := x$ ,  $u_3(x) := x^2$  (3 punkty).

**Zadanie 3. Sprężenie hermitowskie:** Zdefiniuj sprzężenie hermitowskie endomorfizmu skończeniowymiarowej zespolonej przestrzeni wektorowej, oraz udowodnij że wartości własne izometrii takiej przestrzeni mają moduł 1 (4 punkty). Znajdź wszystkie odwzorowania  $h \in \text{End}(\mathbb{C}^2)$  których macierz  $H$  w bazie kanonicznej jest macierzą hermitowską spełniającą

$$H^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4 \text{ punkty}).$$

Znajdź bazę ortonormalną  $\mathbb{C}^2$  złożoną z wektorów własnych  $h$  (2 punkty).

**Zadanie 4. Rozkład na (uogólnione) podprzestrzenie własne, diagonalizacja macierzy (twierdzenia spektralne):** Podaj przykład endomorfizmu przestrzeni  $\mathbb{C}^2$  ze standardowym iloczynem skalarnym który jest diagonalizowalny, ale nie jest normalny (4 punkty). W bazie kanonicznej przestrzeni  $\mathbb{C}^3$  ze standardowym iloczynem skalarnym macierz endomorfizmu  $h \in \text{End}(\mathbb{C}^3)$  ma postać

$$H := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Pokaż że w  $\mathbb{C}^3$  istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych  $h$  (2 punkty).
- Znajdź rzuty spektralne na podprzestrzenie własne  $h$  (2 punkty).
- Czy istnieje stała  $\alpha \in \mathbb{C}$  taka że endomorfizm  $\alpha h$  jest unitarny (2 punkty)?