

Algebra z geometrią II 2012/2013

Pytania na kolokwium ustne (Seria C)

1. Podaj przykład injektywnego homomorfizmu $f: G_1 \rightarrow G_2$ grup abelowych którego odwzorowanie transponowane $f^T: \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_2, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_1, \mathbb{Z})$ *nie* jest surjektywne.
2. Udowodnij że konstrukcja bazy dualnej nie działa w zastosowaniu do bazy nieskończonej.
3. Podaj ogólny wzór na odwrotność macierzy i zastosuj go do macierzy 2×2 .
4. Udowodnij że, jeśli kolumny macierzy $F \in M_n(\mathbb{Z})$ są liniowo zależne, to $\det(F) = 0$.
5. Wyprowadź wzory Cramer'a.
6. Ile elementów musi mieć ciało dla którego istnieje układ równań liniowych postaci

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 1 \\ a_{21}x + a_{22}y = 1 \end{cases}$$

dopuszczający dokładnie 4 różne rozwiązania?

7. Niech $A := \text{End}_{\mathbb{C}}(\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{C})$. Podaj przykład $a, b \in A$ takich że $\text{spec}_A(ab) \neq \text{spec}_A(ba)$.
8. Niech $A := \mathbb{R}[x]$ będzie algebrą wszystkich rzeczywistych funkcji wielomianowych. Jakiej postaci muszą być zbiory $\text{spec}_A(a)$?
9. Niech k będzie dowolnym ciałem. Udowodnij że, jeśli kolumny macierzy $F \in M_n(k)$ są liniowo niezależne, to $\det(F) \neq 0$. Wywnioskuj stąd że każdy element spektrum skończonej macierzy nad ciałem posiada niezerowy wektor własny.
10. Sformułuj twierdzenie o rozkładzie $\mathbb{C}^n$ na podprzestrzenie własne $f \in \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$.
11. Niech $P \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą spełniającą $(2P - I_n)^2 = I_n$. Oblicz $e^{2\pi i P}$.
12. Oblicz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$