

Algebra z geometrią II 2012/2013

Pytania na kolokwium ustne (Seria D)

1 VI 2013, KMMF

1. Niech k będzie przemiennym pierścieniem takim że $\frac{1}{2} \in k$. Udowodnij że każda forma biliniowa na module nad takim pierścieniem da się jednoznacznie przedstawić jako suma formy biliniowej symetrycznej i antysymetrycznej.
2. Niech k będzie przemiennym pierścieniem takim że $\frac{1}{2} \in k$. Udowodnij że każda forma kwadratowa α na module M nad takim pierścieniem spełnia warunek równoległoboku:

$$\forall m, n \in M : \alpha(m+n) + \alpha(m-n) = 2\alpha(m) + 2\alpha(n).$$

3. Niech k będzie przemiennym pierścieniem takim że $\frac{1}{2} \in k$, a M wolnym modulem nad k . Zdefiniuj macierz formy kwadratowej $\alpha : M \rightarrow k$, i pokaż że jest symetryczna.
4. Wyjaśnij różnicę pomiędzy diagonalizacją macierzy formy kwadratowej a diagonalizacją macierzy endomorfizmu. Pokaż że macierz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$$

jest diagonalizowalna jako macierz w bazie kanonicznej formy kwadratowej $\mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$, ale nie jest diagonalizowalna jako macierz w bazie kanonicznej endomorfizmu $\mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}^2$.

5. Zdefiniuj sygnaturę formy kwadratowej $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oraz pokaż jaka musi być sygnatura α jeżeli jest ona dodatnio określona, a jaka jeżeli jest ona ujemnie określona.
6. Pokaż że znak wyznacznika macierzy formy kwadratowej $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nie zależy od wyboru bazy. Jaki musi on być żeby α była ujemnie określona?
7. Udowodnij że norma pochodząca od iloczynu skalarnego na zespolonej przestrzeni wektorowej V spełnia warunek równoległoboku:

$$\forall x, y \in V : \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

8. Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny. Podaj przykład podprzestrzeni wektorowej W takiej że $W^{\perp\perp} \neq W$.
9. Niech V będzie skończeniowymiarową zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny. Udowodnij że każda izometria V jest unitarna.
10. Udowodnij że wartości własne endomorfizmu hermitowskiego są zawsze rzeczywiste.
11. Niech $\langle | \rangle$ będzie dowolnym iloczynem skalarnym na zespolonej przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^2$. Udowodnij istnienie bazy ortonormalnej względem $\langle | \rangle$.
12. Niech V będzie zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny. Udowodnij że, jeżeli istnieje baza ortonormalna złożona z wektorów własnych endomorfizmu $f \in \text{End}(V)$, to f jest endomorfizmem normalnym. Przy jakim dodatkowym założeniu o V prawdziwa jest implikacja przeciwna?
13. Niech V będzie skończeniowymiarową zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny, a $p \in \text{End}(V)$ rzutem ortogonalnym. Udowodnij że $V = \ker p \oplus \text{im } p$ oraz $\ker p \perp \text{im } p$.
14. Niech V będzie skończeniowymiarową zespoloną przestrzenią wektorową wyposażoną w iloczyn skalarny, a $f \in \text{End}(V)$ dowolnym endomorfizmem. Udowodnij że $\ker f = \ker |f|$.