⑩ POJĘCIE CIĄGŁOŚCI

Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi. Odwzorowanie $X \xrightarrow{f} Y$ nazywamy <u>ciągłym</u> jeśli

$$\boxed{U \in \mathcal{O}(Y) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}(X)}$$

<u>Uwaga</u>: Odwzorowanie pomiędzy zbiorami $X \xrightarrow{f} Y$ to $f \subseteq X \times Y$ taki że $\Big((x,y) \in f$ i $(x,y') \in f \Rightarrow y = y'\Big)$.

$y = f(x) \Leftrightarrow (x,y) \in f$.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $X \xrightarrow{f} Y$ będzie odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami topologicznymi. Następujące warunki są równoważne:

i) f jest ciągłe

ii) C - domknięty $\Rightarrow f^{-1}(C)$ - domknięty

iii) $\forall \{x_\alpha\}_{\alpha\in D} \subseteq X : f(\lim_{\alpha\in D} x_\alpha) \subseteq \lim_{\alpha\in D} f(x_\alpha)$

iv) $\forall A \subseteq X : f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

v) $\forall B \subseteq Y : f^{-1}(\operatorname{Int} B) \subseteq \operatorname{Int} f^{-1}(B)$

Mówimy że $X \xrightarrow{f} Y$ jest <u>ciągłe w $x\in X$</u> jeśli

$$\boxed{\forall\, \mathcal{O}(Y) \ni V \ni f(x)\ \exists\, \mathcal{O} \ni U \ni x : f(U) \subseteq V}$$

Odwzorowanie f jest ciągłe jeśli jest ciągłe w każdym punkcie.

<u>Zadanie 11</u>: Niech $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ będzie otwartym pokryciem X. Udowodnij że $X \xrightarrow{f} Y$ jest ciągłe $\Leftrightarrow \forall \alpha\in I : U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} Y$ jest ciągłe. ($\mathcal{O}(U_\alpha) = \{U_\alpha \cap V \mid V \in \mathcal{O}(X)\}$, $\alpha\in I$, $f_\alpha(x) = f(x)$, $\forall x\in U_\alpha$, $\alpha \in I$.)

Przykłady ciągłości $X \xrightarrow{f} Y$:

① Dla topologii metrycznych $\mathcal{O}_{d_X}(X)$ i $\mathcal{O}_{d_Y}(Y)$ mamy $\forall x \in X$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

② Dla topologii Alexandrowa $\mathcal{U}(X, \leq_X)$ i $\mathcal{U}(Y, \leq_Y)$ mamy

f jest ciągła $\Leftrightarrow (x \leq_X y \Rightarrow f(x) \leq_Y f(y))$

Istotnie, $x \leq y \Leftrightarrow x \in \overline{\{y\}} \Rightarrow$

z ciągłości f

$f(x) \in f(\overline{\{y\}}) \subseteq \overline{\{f(y)\}} \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Odwrotnie, $f(\bar{A}) = f\left(\bigcup_{x \in A} \downarrow x\right) = \bigcup_{x \in A} f(\downarrow x)$. Teraz,

z zachowywania quasi porządku przez f otrzymujemy $y \in f(\downarrow x) \Leftrightarrow \exists z \leq x : y = f(z) \leq f(x)$

$\Rightarrow y \in \downarrow f(x)$. Zatem $f(\bar{A}) = \bigcup_{x \in A} f(\downarrow x) \subseteq \bigcup_{x \in A} \downarrow f(x)$

$= \overline{f(A)}$.

③ $\mathcal{O}(Y) = \{\emptyset, Y\} \Rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ jest zawsze ciągłe.

④ $\mathcal{O}(X) = 2^X \Rightarrow X \xrightarrow{f} Y$ jest zawsze ciągłe

⑤ $\mathcal{O}(X) = \{\emptyset, X\}$ i Y jest T_0

$\Rightarrow \big(X \xrightarrow{f} Y$ jest ciągłe $\Leftrightarrow$ jest stałe, tzn. $f(X) = \{y_0\}\big)$. Istotnie, $\exists x, x' \in X$ i $U \in \mathcal{O}(Y)$: $f(x) \neq f(x')$, $f(x) \in U \not\ni f(x') \Rightarrow$

$x \in f^{-1}(U) \not\ni x' \Rightarrow f^{-1}(U) \notin \{\emptyset, X\}$.

Zatem f <u>nie</u> jest stałe $\Rightarrow f$ <u>nie</u> jest ciągłe. Implikacja f stałe $\Rightarrow f$ ciągłe jest <u>zawsze</u> prawdziwa (w każdej topologii $\mathcal{O}(X)$ i $\mathcal{O}(Y)$).

⑥ $X \xrightarrow{id} X$ jest ciągła w każdej topologii $\mathcal{O}(X)$.

<u>Homeomorfizm</u> to ciągła bijekcja której odwrotność jest ciągła.

<u>Przykład</u>: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Kontrprzykład: $[0,1[\xrightarrow{\exp} S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$, jest ciągłą bijekcją, ale jej odwrotność <u>nie</u> jest ciągła.