(11) GRANICE ODWZOROWAŃ W PUNKCIE

Niech $X \xrightarrow{f} Y$ będzie dowolnym (niekoniecznie ciągłym) odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami topologicznymi X i Y.

Granicą f w punkcie $a \in \bar{A} \subseteq X$ po podzbiorze A nazywamy podzbiór Y

$$\lim_{A \ni x \to a} f(x) \,.$$

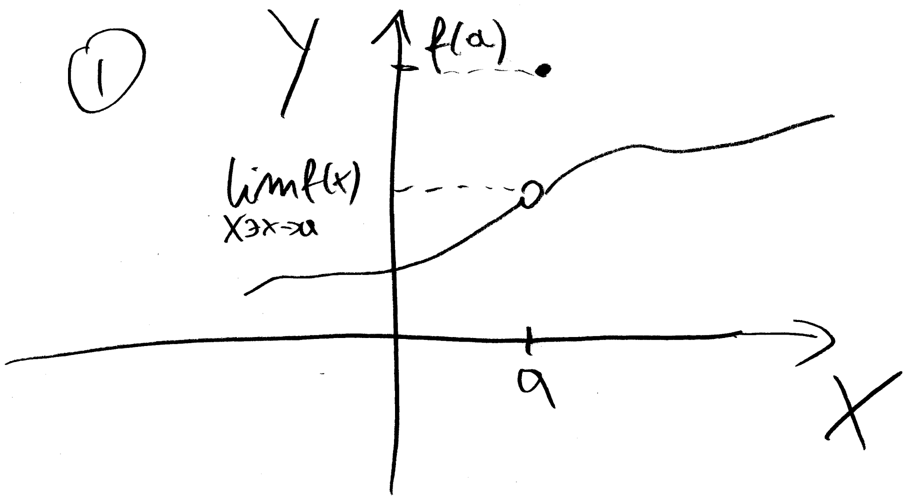
$$\|$$

$$\{y \in Y \mid \forall\, \mathcal{O}(Y) \ni V \ni y \;\exists\, \mathcal{O}(X) \ni U \ni a : f((U \cap A) \setminus \{a\}) \subseteq V\}$$

Twierdzenie: Odwzorowanie $X \xrightarrow{f} Y$ jest ciągłe $\Leftrightarrow \forall a \in X : \lim\limits_{X \ni x \to a} f(x) \ni f(a)$

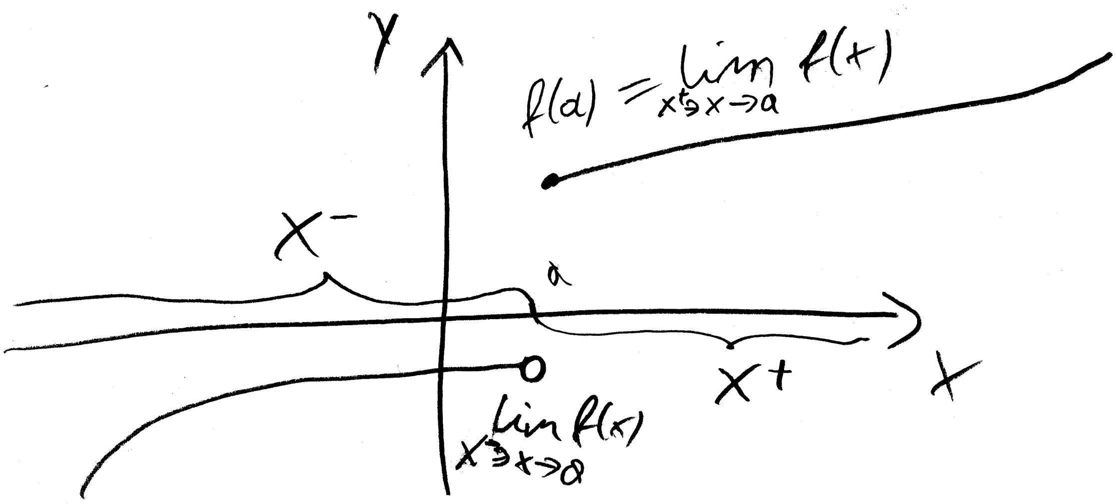
Dowód: $f((U \cap X) \setminus \{a\}) \subseteq f(U)$, a ciągłość f daje $f(U) \subseteq V$. Stąd $f(a) \in \lim\limits_{X \ni x \to a} f(x)$ jeśli f jest ciągłe. Odwrotnie, $f((U \cap X) \setminus \{a\}) \subseteq V$ oraz $f(a) \in V$ daje $f(U) \subseteq V$, czyli ciągłość w a. □

Przykłady: ①



$$\emptyset \neq \lim_{X\ni x\to a} f(x) =: \lim_{x\to a} f(x) \not\ni f(a)$$

②



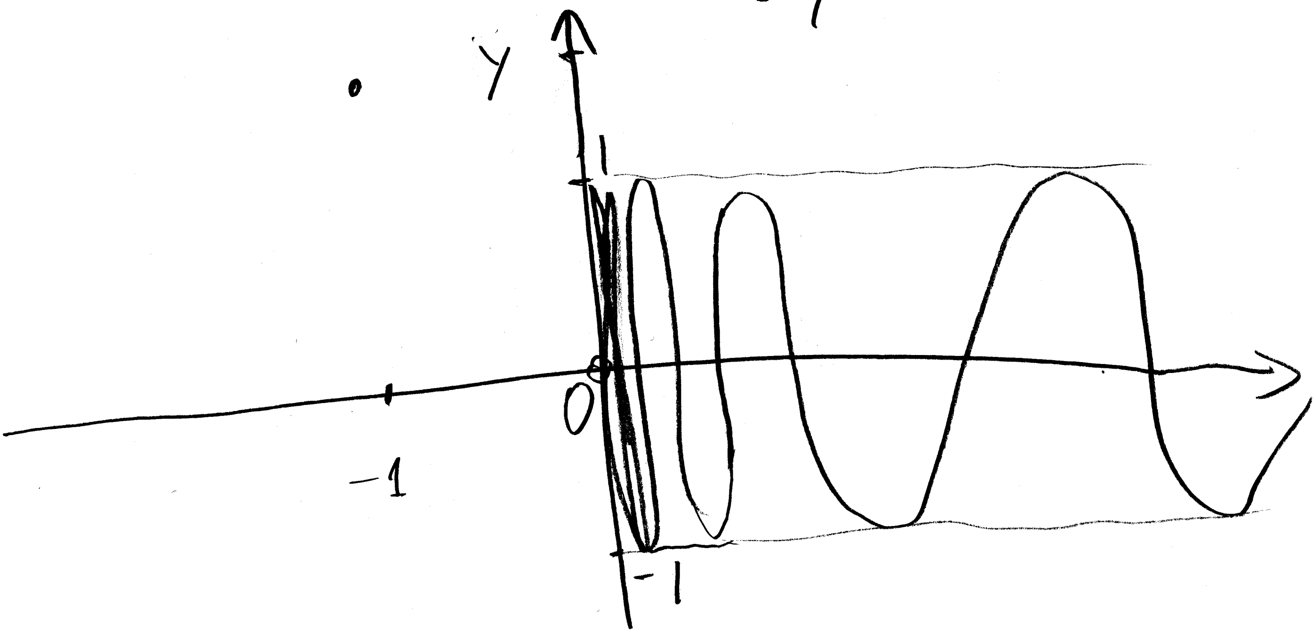
$$\emptyset = \lim_{x\to a} f(x) \quad \text{ale} \quad \lim_{X^+\ni x\to a} f(x) \ni f(a)$$

oraz $\emptyset \neq \lim_{X^-\ni x\to a} f(x) \not\ni f(a)$.

3) Jeśli a jest punktem izolowanym ($\{a\}\in\mathcal{O}(X)$), to $\lim_{x\to a} f(x) = Y$. Zatem f jest ciągła $\iff$ f jest ciągła wszędzie poza a.

$X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \cup \{-1\}$, $Y = \mathbb{R}$,

$X \xrightarrow{f} Y$, $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \\ y & \text{dla } x = -1 \end{cases}$.



f jest ciągłe $\forall y \in Y$ bo $f((\{a\} \cap X) \setminus \{a\}) = f(\emptyset) \subseteq V$, $\forall V \in \mathcal{O}(Y)$.

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(a+x) - f(a)}{x} = f'(a)$

$\mathbb{k} \xrightarrow{f} \mathbb{k}$, gdzie $\mathbb{k} \in \{\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

Niech $X \xrightarrow{f} Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami topologicznymi X i Y. Rozważmy $\mathcal{U}_a = \{U \setminus \{a\} \mid \mathcal{O}(X) \ni U \ni a\}$ jako zbiór skierowany przez $A \leq B \Leftrightarrow A \supseteq B$, oraz

ciąg uogólniony $\mathcal{U}_a \xrightarrow{\tilde{f}} 2^Y$ zdefiniowany przez

$\tilde{f}_U = f(U) \in 2^Y$; topologią Alexandrowa

$\mathcal{U}(2^Y, \supseteq)$.

<u>Twierdzenie</u>: $\boxed{y \in \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow V \in \lim_{U \in \mathcal{U}_a} \tilde{f}_U, \quad \forall\, \mathcal{O}(Y) \ni V \ni y.}$

<u>Dowód</u>: Niech $\mathcal{O}(Y) \ni V \ni y$. $V \in \lim_{U\in\mathcal{U}_a} \tilde{f}_U$

$\Leftrightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U}_a \; \forall U_0 \supseteq U \in \mathcal{U}_a : f(U) \in \uparrow V$.

Ale $f(U) \in \uparrow V \Leftrightarrow V \leq f(U) \Leftrightarrow V \supseteq f(U)$

Mamy też $\forall U_0 \supseteq U \in \mathcal{U}_a : f(U_0) \supseteq f(U)$.

Zatem $V \in \lim_{U\in\mathcal{U}_a} \tilde{f}_U \Leftrightarrow \exists U_0 \in \mathcal{U}_a : f(U_0) \subseteq V$

Z dowolności V wynika teza twierdzenia. $\square$

Uwaga: W przypadku gdy X jest przestrzenią metryczną, granicę $X \xrightarrow{f} Y$ w $a \in X$ da się wyrazić prościej jako granicę ciągu uogólnionego. Wtedy jako zbiór skierowany można wziąć $X_a = X$ z quasi porządkiem $x \leq y \Leftrightarrow d_X(x,a) \geq d_X(y,a)$.

$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \in X_a} f(x)$ jest oczywista.

Niech $D \xrightarrow{\tilde{f}} Y$ będzie dowolnym ciągiem uogólnionym. Oznaczmy $D^+ = D \amalg \{a\}$ i rozważmy D jako przestrzeń topologiczną z topologią Alexandrowa $\mathcal{U}(D, \leq)$. Rozszerzmy topologię z D do D^+ przez $\mathcal{O}(D^+) =$

$$= \boxed{\mathcal{O}(D) \cup \{U \cup \{a\} \mid U \in \mathcal{O}(D) \setminus \{\emptyset\}\}}.$$

$\mathcal{O}(D^+)$ jest topologią bo $U, V \in \mathcal{O}(D^+) \Rightarrow$

$\Rightarrow U = \tilde{U} \cup A,\ V = \tilde{V} \cup B,\quad A, B \in \{\emptyset, \{a\}\},$

$\tilde{U}, \tilde{V} \in \mathcal{O}(D) \Rightarrow U \cap V = (\tilde{U} \cap \tilde{V}) \cup (\tilde{U} \cap B) \cup$

$(\tilde{V} \cap A) \cup (A \cap B) = (\tilde{U} \cap \tilde{V}) \cup (A \cap B) \in \mathcal{O}(D^+)$.

Ponieważ $\tilde{U} \cap \tilde{V} \in \mathcal{O}(D)$ i $A \cap B \in \{\emptyset, \{a\}\}$, wystarczy wykazać że $A = B = \{a\} \Rightarrow \hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset$. Wynika to stąd że D jest zbiorem skierowanym. Istotnie, $A = \{a\} \Rightarrow \hat{U} \neq \emptyset$ i $B = \{a\} \Rightarrow \hat{V} \neq \emptyset$.

Niech $u \in \hat{U}$ i $v \in \hat{V}$. Wtedy $\exists z \in D$: $u \leq z$ i $v \leq z$. Zatem $z \in \uparrow u \cap \uparrow v \subseteq \hat{U} \cap \hat{V}$, stąd $\hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset$.

<u>Uwaga</u>: $\mathcal{O}(D^+)$ jest topologią Alexandrowa $\Leftrightarrow \exists z \in D \ \forall \alpha \in D: \alpha \leq z$. Istotnie,

$$\bigcap_{V \in \{U \cup \{a\} \mid U \in \mathcal{O}(D) \setminus \{\emptyset\}\}} V = \{a\} \cup \bigcap_{U \in \mathcal{O}(D) \setminus \{\emptyset\}} U =$$

$$= \{a\} \cup \{z \in D \mid \alpha \leq z, \ \forall \alpha \in D\}.$$

Z drugiej strony, $\{a\} \notin \mathcal{O}(D^+)$.

<u>Uwaga</u>: $\{a\} \in \mathcal{O}(D^+) \Rightarrow a \in \bar{D} = D^+$.

Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X, podzbiór $A \subseteq X$ nazywamy <u>gęstym</u> jeśli

$\overline{A} = X$.

<u>Twierdzenie</u>: Niech $f(\alpha) := \tilde{f}_\alpha$, $\forall \alpha \in D$.

Wtedy $\boxed{\lim_{\alpha \in D} \tilde{f}_\alpha = \lim_{D \ni \alpha \to a} f(\alpha)}$.

<u>Dowód</u>: Niech $y \in \lim_{\alpha \in D} \tilde{f}_\alpha$ i $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$.

$\exists \alpha_0 \in D \ \forall \alpha_0 \leq \alpha : \tilde{f}_\alpha \in V \Leftarrow\Rightarrow \exists \alpha_0 \in D : \tilde{f}_{\uparrow \alpha_0} \subseteq V$

$\Rightarrow \exists \uparrow \alpha_0 \in \mathcal{O}(D^+) : f(D \cap \uparrow \alpha_0 \setminus \{a\}) \subseteq V$

$\Rightarrow y \in \lim_{D \ni \alpha \to a} f(\alpha)$. Odwrotnie, niech

$y \in \lim_{D \ni \alpha \to a} f(\alpha)$ i $y \in V \in \mathcal{O}(Y)$. Stąd

$\exists \mathcal{O}(D^+) \ni U \ni a : \quad f((D \cap U) \setminus \{a\}) \subseteq V \Leftarrow\Rightarrow$

$\Leftarrow\Rightarrow \exists \mathcal{O}(D) \ni \tilde{U} \neq \emptyset : f(\tilde{U}) \subseteq V \Rightarrow$

$\exists \alpha_0 \in \tilde{U} \subseteq D \ \forall \alpha_0 \leq \alpha : \tilde{f}_\alpha \in V \Rightarrow y \in \lim_{\alpha \in D} \tilde{f}_\alpha$. $\square$