(12) GRANICE W NIESKOŃCZONOŚCI

<u>Motywujący przykład</u>: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = g$

Z jednej strony, wyrażamy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in \mathbb{R} \ \forall x \geq x_0 : |f(x) - g| < \varepsilon$$

w ogólnotopologicznych terminach.

Z drugiej strony, dołączamy nieskończoność jako nowy punkt przestrzeni i pokazujemy że granica w nieskończoności to granica w dołączonym punkcie:

Niech $X \xrightarrow{f} Y$ będzie dowolnym odwzorowaniem pomiędzy przestrzeniami topologicznymi X i Y. Niech $\mathcal{C} \subseteq 2^X$ będzie rodziną podzbiorów X taką, że:

i) $\emptyset \in \mathcal{C}$ i $X \notin \mathcal{C}$,

ii) $C_1, C_2 \in \mathcal{C} \Rightarrow C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$,

iii) $C_i \in \mathcal{C},\ \forall i \in I \Rightarrow \bigcap_{i \in I} C_i \in \mathcal{C}$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Granica } f \text{ w } \mathcal{C}\text{-nieskończoności to} \\ \lim\limits_{\mathcal{C}} f := \{ y \in Y \mid \forall \mathcal{O}(Y) \ni V \ni y\ \exists C \in \mathcal{C} : f(X \setminus C) \subseteq V \}\end{array}}$$

Przykład: $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_+ = \{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R} \}$, $\lim\limits_{\mathcal{C}_+} f = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Twierdzenie: Niech $X^+ := X \amalg \{a\}$ z topologią

$$\mathcal{O}(X^+) = \mathcal{O}(X) \cup \{ (X \setminus C) \cup \{a\} \mid C \in \mathcal{C} \}.$$

Wtedy $\boxed{\lim\limits_{\mathcal{C}} f = \lim\limits_{X \ni x \to a} f(x)}$.

Zadanie 12: Niech $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$ będzie ciągiem uogólnionym w T_1-przestrzeni, a $D^+ = D \amalg \{a\}$ zbiorem skierowanym zdefiniowanym przez $\forall \alpha \in D^+ : \alpha \leq a$. Niech $y_\alpha = x_\alpha$, $\forall \alpha \in D$, i $\{y_a\} = \lim\limits_{\alpha \in D} x_\alpha$. Udowodnij, że $\lim\limits_{\alpha \in D^+} y_\alpha = \{y_a\}$.

Przestrzeń topologiczna X jest <u>zwarta</u> jeśli z każdego jej otwartego pokrycia można wybrać podpokrycie skończone:

$$\boxed{\begin{array}{c} \bigcup_{i\in I} U_i = X;\ \forall i \in I: U_i \in \mathcal{O}(X) \\ \Downarrow \\ \exists n \in \mathbb{N}: U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n} = A,\ i_1, \ldots, i_n \in I \end{array}}$$

<u>Podstawowe własności:</u> ① Każdy zwarty podzbiór przestrzeni Hausdorffa jest domknięty.

① Każda skończona suma zbiorów zwartych jest zwarta.

② Każdy domknięty podzbiór C przestrzeni zwartej X jest zwarty. Istotnie, niech $\{U_i\}_{i\in I}$ będzie dowolnym otwartym pokryciem zbioru domkniętego C, tzn. $\forall i \in I$: $U_i = V_i \cap C$, $V_i \in \mathcal{O}(X)$, oraz $\bigcup_{i\in I} U_i = C$ (równoważnie $\bigcup_{i\in I} V_i \supseteq C$). Wtedy $\{V_i\}_{i\in I} \cup \{X \setminus C\}$ jest <u>otwartym</u> pokryciem X.

więc możemy wybrać podpokrycie skończone $W_1, \dots, W_n$. Stąd $C \subseteq X = \bigcup_{j \in \{1, \dots, n\}} W_j$ i $\{W_j \cap C\}_{j \in \{1, \dots, n\}}$ jest podpokryciem skończonym C.

<u>Fundamentalny przykład</u>: Niech X będzie <u>niezwartą przestrzenią Hausdorffa</u>. Zbiór jej wszystkich <u>zwartych</u> podzbiorów jest $\mathcal{C}$-rodziną dzięki własnościom 1, 2 i 3.

<u>Zadanie 13</u>: Udowodnij że w fundamentalnym przykładzie X^+ jest zwarte. X^+ nazywamy <u>jednopunktowym</u> (<u>Alexandrowa</u>) <u>uzwarceniem</u> X.

<u>Przykład z teorii względności</u>: