(13) TOPOLOGIA CIAŁ I INNYCH STRUKTUR ALGEBRAICZNYCH

Monoid to zbiór M z łącznym działaniem $M \times M \xrightarrow{+} M$ i elementem neutralnym działania: $\exists 0 \in M \; \forall m \in M: 0 + m = m = m + 0$. Przykład: $(\mathbb{N}, +, 0)$ lub $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$.

Grupa to monoid G taki że $\forall g \in G \; \exists g^{-1} \in G: g g^{-1} = e = g^{-1} g$.
Grupę nazywamy abelową jeśli $\forall g, g' \in G: g g' = g' g$. Przykład: $(\mathbb{Z}, +, 0)$.

Pierścień to zbiór R z dwoma działaniami $R \times R \xrightarrow{+} R$, $R \times R \xrightarrow{\cdot} R$, takimi że $(R, +, 0)$ jest grupą abelową, $(R, \cdot, 1)$ jest monoidem, oraz $\forall x, y, z \in R$: $(x+y) \cdot z = xz + yz$ i $x(y+z) = xy + xz$.
Pierścień jest przemienny jeśli $\forall x, y \in R: xy = yx$.
Przykład: $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$.

<u>Uwaga</u>: Jeśli R jest pierścieniem takim że $0=1$, to $R=\{0\}$. Istotnie, $\forall r\in R$: $r=r\cdot 1=r\cdot 0=r(r-r)=r^2-r^2=0$.

<u>Ciało</u> to pierścień przemienny k taki że $(k\setminus\{0\},\cdot)$ jest grupą. Przykłady: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

<u>Monoid topologiczny</u> $(M,+,0,\mathcal{O}(M))$ to monoid wyposażony w topologię $\mathcal{O}(M)$ taką że $M\times M\xrightarrow{+}M$ jest <u>ciągłe</u> dla topologii produktowej na $M\times M$. Przykład: $\mathbb{N}$ z topologią dyskretną.

<u>Grupa topologiczna</u> $(G,+,0,\mathcal{O}(G))$ to grupa G z taką topologią $\mathcal{O}(G)$ że G jest monoidem topologicznym i odwzorowanie $G\ni g\mapsto g^{-1}\in G$ jest <u>ciągłe</u>. Przykład: $(\mathbb{Z},+,0)$ z topologią dyskretną.

<u>Pierścień topologiczny</u> $(R,+,0,\cdot,1,\mathcal{O}(R))$ to pierścień R taki że $(R,+,0,\mathcal{O}(R))$ jest grupą topologiczną i $(R,\cdot,1,\mathcal{O}(R))$ jest monoidem

topologicznym. Przykład: $(\mathbb{Z}, +, 0, \cdot, 1)$ z topologią dyskretną.

<u>Ciało topologiczne</u> $(k, +, 0, \cdot, 1, \mathcal{O}(k))$ to ciało k takie że $(k, +, 0, \cdot, 1, \mathcal{O}(k))$ jest pierścieniem topologicznym i odwzorowanie $k \setminus \{0\} \ni x \longmapsto x^{-1} \in k \setminus \{0\}$ jest ciągłe.

<u>Przykłady</u>: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ z topologią <u>metryczną</u> zadaną przez wartości bezwzględne: $d(x,y) = |x-y|$. Te same ciała z topologią dyskretną.

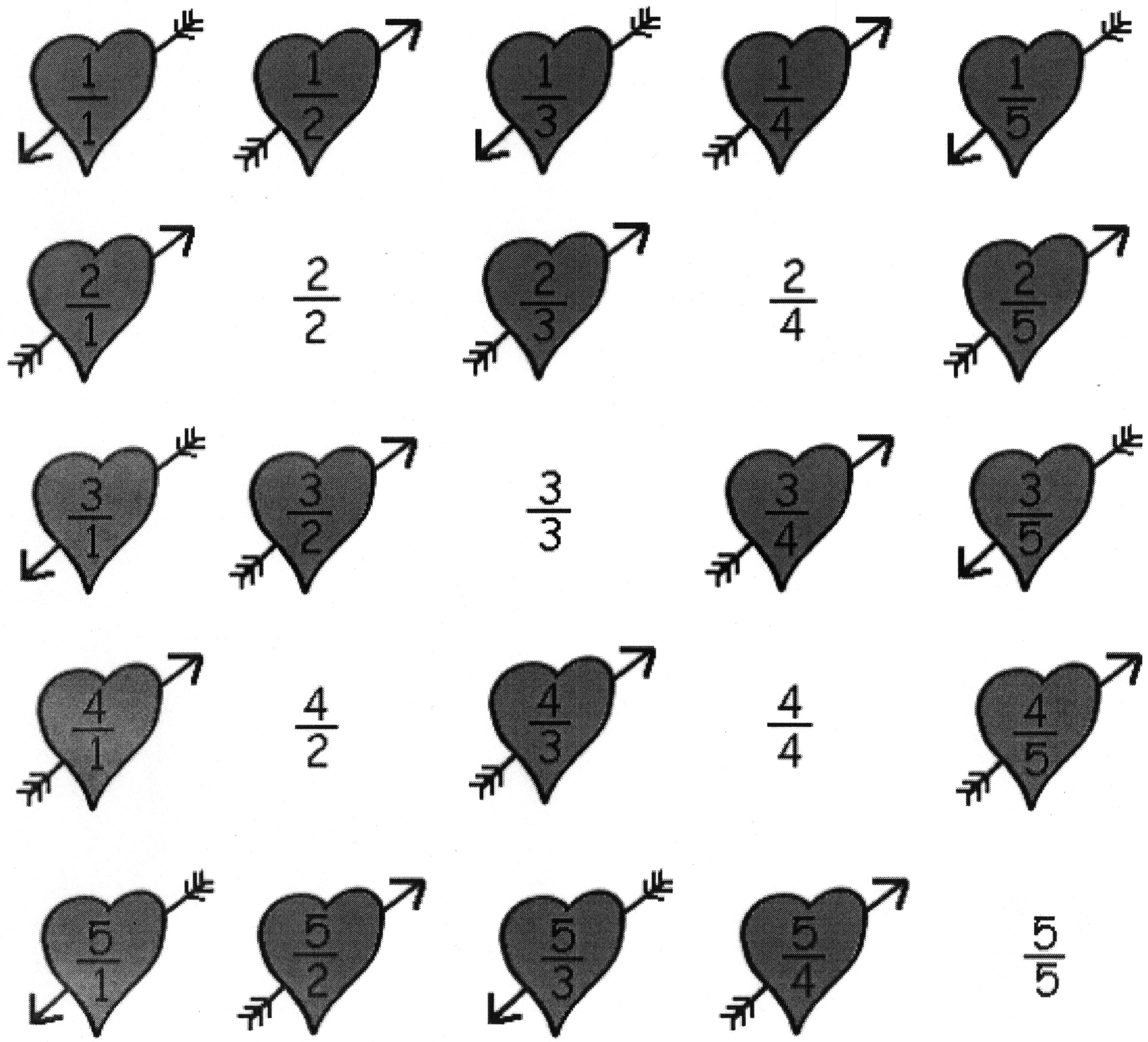
<u>Pierścień p-adycznych liczb całkowitych</u> $\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k \mid a_k \in \{0, \dots, p-1\} \right\}$ jest uzupełnieniem w metryce p-adycznej pierścienia $\mathbb{Z}$.

<u>Zadanie 14</u>: Udowodnij że zbiór 2-adycznych liczb całkowitych (z topologią 2-adyczną) jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora $C := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} \in \mathbb{R} \mid c_k \in \{0, 2\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$ z topologią euklidesową indukowaną z $\mathbb{R}$.

Fl

Walentynkowy dowód przeliczalności ciała liczb wymiernych:

HOW DO I LOVE THEE?



Topologia Tichonowa (produktowa): Niech

$\prod_{i \in I} X_i$ będzie dowolnym produktem przestrzeni topologicznych. Zbiór otwarty w tym produkcie definiujemy jako dowolną sumę zbiorów postaci $\prod_{i \in I} U_i$, gdzie U_i jest podzbiorem otwartym $\forall i \in I$, oraz tylko dla skończonej ilości $i \in I$ mamy $U_i \neq X_i$.

Twierdzenie Tichonowa: Zbiór $\prod_{i \in I} X_i$ jest zwarty w topologii Tichonowa $\Longleftrightarrow \forall i \in I : X_i$ jest zwarty.

Wniosek: Zbiór Cantora jest zwarty bo jest homeomorficzny z $\prod_{n \in \mathbb{N}} \{0,2\}$.

F78